上海文化发展基金会图书出版专项基金资助项目

教育神经科学译丛
译丛主编 周加仙



How The Brain Learns Mathematics

人脑如何学数学

[美] 戴维 · A.苏泽◎著
David A. Sousa

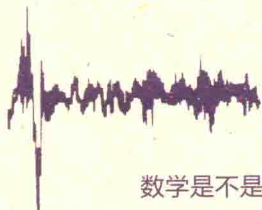
赵晖◎等译

华东师范大学
教育神经科学研究中心
◎组织翻译



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

世纪出版



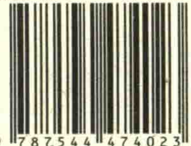
数学是不是背公式？要学好数学是不是靠大量做题？到底什么是数学？本书通过对脑与数学认知研究领域中各种有趣的研究成果解读，为教与学的各种理论提供坚实的佐证，并开拓新的观点。在本书中，作为有着多年数学教育工作经验的研究者，作者用简洁平实的语言，深入浅出地讲解了脑神经科学研究对于数学学习问题的解释，从人脑发育的规律及一般认知学习的特性等方面为数学的教与学提出了建议，可以为中国的数学教育工作者提供借鉴。由于作者科学的态度和对知识深厚的把握，本书荣获 2008 年美国独立出版书籍奖铜奖。

上海教育出版社
官方微信平台



官方网站：
www.seph.com.cn

ISBN 978-7-5444-7402-3



易文网：www.ewen.co
定　价：　40.00元

教育神经科学译丛

译丛主编 周加仙

How
The
Brain
Learns
Mathematics

人脑如何学数学

[美] 戴维·A.苏泽◎著
David A. Sousa

赵晖◎等译

华东师范大学
教育神经科学研究中心
◎组织翻译



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

David A. Sousa

How the Brain Learns Mathematics

English Language edition published by Corwin Press, a SAGE Publications Company of Thousand Oaks, London, New Delhi, Singapore and Washington D.C., ©2008 by Corwin Press.

上海市版权局著作权合同登记号图字 09-2013-763 号

图书在版编目(CIP)数据

人脑如何学数学 / (美)戴维·A.苏泽著;赵晖等译. —上海:
上海教育出版社,2016.12
(教育神经科学译丛/周加仙主编)
ISBN 978-7-5444-7402-3

Ⅰ.①人… Ⅱ.①戴…②赵… Ⅲ.①脑科学—关系—数学—
学习方法—研究 Ⅳ.①R338.2②01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第307936号

教育神经科学译丛

译丛主编　周加仙

人脑如何学数学

[美]戴维·A.苏泽　著

赵　晖　等译

华东师范大学教育神经科学研究中心组织翻译

出　版	上海世纪出版股份有限公司 上　海　教　育　出　版　社 官　网 www.seph.com.cn 易文网 www.ewen.co
地　址	上海市永福路 123 号
邮　编	200031
发　行	上海世纪出版股份有限公司发行中心
印　刷	上海展强印刷有限公司
开　本	720×1000　1/16　印张 14　插页 3
版　次	2016 年 12 月第 1 版
印　次	2016 年 12 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 978-7-5444-7402-3/G·6098
定　价	40.00 元

(如发现质量问题，读者可向工厂调换)

译丛总序

脑：人类学习和教育的重要器官[①]

[美] 柯特·W.费希尔[②]　周加仙

人能够学习。人类具有学习的特殊能力，是学习使我们成为真正的人。人的这种"特殊性"部分归因于人脑这个学习的重要器官。儿童时期，我们广泛学习社会文化和生活知识。近代历史中，人类通过建立学校开展正规的学习活动。我们在学校度过多年的时光，来学习阅读、数学、科学、历史、艺术、音乐等知识。是学习将学校与人脑紧密地联系在一起(Battro，Fischer & Léna，2007)。

教育神经科学的诞生：教育和生物学的革命

将脑、认知科学与教育结合起来的一场革命正在世界范围内展开，其目的是创造新的知识和研究工具来极大地提高学生学习的效率。然而，如果期望过高，人们的热情将随着时间的推移而消退，那么这很可能最终变成教育中的又一阵

① 本文原英文部分由周加仙、陈洁翻译。

② 柯特·W.费希尔(Kurt W. Fischer)，美国哈佛大学教育研究院教授，"国际心智、脑与教育学会"创始人，该学会官方刊物《心智、脑与教育》的创刊人和首任主编。

流行之风。其风险在于,学校会期望从神经科学中得到快速解决教育问题的对策,但这种期望是不切实际的！我们需要的是将生物学、神经科学、认知科学、教育学整合在一起的新知识与新方法(Immordino-Yang & Damasio, 2007; Szücs & Goswami, 2007)。创建“心智、脑与教育”(Fischer, Bernstein & Immordino-Yang, 2007; Fischer et al., 2007)或者说“教育神经科学”这个领域的目的,就是为教育理论、教育政策和教育实践奠定科学的基础,从而改变教育缺乏科学证据的状况。教育只有以有效的科学证据为基础,才能充分发挥其应有的作用。

目前,国际著名大学已经建立起许多教育神经科学的研究机构或组织。如美国哈佛大学教育研究院、哥伦比亚大学教师教育学院、加州大学的旧金山分校和圣地亚哥分校、威斯康星大学麦迪逊分校、范德比尔特大学等,都建立了教育神经科学研究机构;英国剑桥大学和伦敦大学学院分别建立了教育神经科学研究中心;加拿大西蒙·弗雷泽大学建立了数学教育神经科学实验室(周加仙,2013)。在中国,2010年12月,华东师范大学创立了我国第一个教育神经科学研究中心;2012年12月,台湾师范大学建立教育神经科学实验室,并将发展教育神经科学作为迈向世界顶尖大学的重要举措。目前,国际上有关教育神经科学的专业研究机构与专业人才培养机构共有40余个。其中,华东师范大学教育神经科学研究中心独具特色,该中心依托华东师范大学“心智—脑—行为—社会”多层面互动的研究体系,吸收了教育学、心理学、神经科学(认知神经科学)等传统学科的优势,采用超学科、跨学院的研究形式进行教育神经科学的研究。这种研究思路得到了国际教育神经科学研究界的关注。2010年,国际著名学术期刊《神经元》(*Neuron*)将华东师范大学列为世界教育神经科学的研究重镇(Thomas & Susan, 2010)。

学术期刊的创办对于一个新兴学科领域的发展具有重要作用。目前,教育神经科学领域创办了四份学术期刊:(1)《心智、脑与教育》(*Mind, Brain, and Education*)于2007年正式创刊,是“国际心智、脑与教育学会”的官方刊物,创刊当年即被评为最优秀的新创刊社会科学杂志。

目前，该期刊已经被纳入 SSCI 期刊；(2)《神经科学与教育进展》(*Trends in Neuroscience and Education*，季刊)于 2012 年创刊，主编为德国乌尔姆大学神经科学与学习转化中心负责人斯皮策(Manfred Spitzer)；(3) 加拿大魁北克创办的《神经教育学》(*Neuro-education*，年刊)；(4)《教育生物学杂志》(季刊)，是中国第一本该领域的专业期刊，经原新闻出版总署批准于 2013 年正式创刊，上海交通大学主办，其特色是将医学与生物学、神经科学、教育学结合起来，为教育奠定科学的基础。

21 世纪是生命科学的世纪，生命科学的突飞猛进与日新月异的变化经常成为报刊的头条新闻。科学研究展现了人脑惊人的可塑性，以及人在阅读的时候或者在吸毒成瘾的时候，大脑产生了怎样的变化以适应新环境和新情境。借助新的神经影像工具，科学家们开始了解学习发生的过程，例如，数字学习是如何改变神经元联结的，不同的语言是如何影响认知和记忆的，人的感受是如何塑造学习和信念的。这些研究证明了教育变化的本质规律和全世界对教育的要求。教育提高了人们的生活质量，使个体能够获得更好的工作、更加健康的体魄，也使得社区和国家更加繁荣昌盛(Graham, 2005)。学校教育不仅让个体学会阅读，而且改善了婴儿和母亲的健康及生存比例，同时还抑制了人口的过快增长。

要在教育中发挥脑科学的潜力，当务之急是建立这样一门能够促进脑科学研究工作者和教育工作者相互合作的综合性学科。在这门新的学科里，合作双方都具有重要的作用。为了避免这一综合学科的研究沦为一时的流行风潮，教育者和研究者必须共同努力，运用实践研究来阐释在学习环境中什么是有用的、什么是无用的。教育者和脑、认知科学的研究者必须合作，共同创建能够指导教育实践的有用知识，并运用这种知识来研究学校或其他学习环境中的学习是如何发生的(Hinton & Fischer, 2007)。这种合作的一个典型范例是《芝麻街》，这部电视动画片是根据 1969 年初开始的一项研究取得的成果拍摄的(Lesser, 1974)。一项研究就能有效地影响学习环境并最终提升各年龄段学生的学习成效，即使在现今，仍然是十分少见的例子。

神经科学的研究似乎会自然地影响教育,儿童的教育似乎也会明显地涉及脑的结构、发展与学习。基于这样一种直觉的认识,欧美教育领域盛行所谓"基于脑的教育"的主张,而这些主张完全没有认知科学或脑科学的基础。例如,"基于脑的教育"称,每个学生都有脑。但是这并不能给所谓"基于脑的教育"提供科学的证据。"基于脑的教育"缺少的是科学的研究基础。认真阅读这些所谓"基于脑的"学习和教育的报告、文章或者书籍不难发现,"基于脑的教育"是用脑科学的语言包装了有关学习的主张,但实际上并不是基于脑科学的研究提出的。教育神经科学仍然很年轻,目前只有少数研究者是在教育的情景中研究脑的学习过程,很少有教师能帮助科学研究者共同思考具有实用价值的研究课题,大部分重要的教育问题都还没有得到研究。这是一个有待研究与开发的重要领域。

幸运的是,教育神经科学的研究前景已经展现出一派光明。例如,在阅读困难或阅读障碍的研究中,运用神经影像工具来研究儿童是如何学会阅读的,哪些方法能促进儿童的学习。过去的证据证明,神经影像技术能成功地预测哪些学生容易患阅读障碍,并为干预、预防这类困难提供指导(Gabrieli, 2009)。有关发展与学习的研究揭示出几个有前途的发展方向:追踪学习轨迹的方法,DNA在学习中的中介作用,情绪对学习和发展的强大的组织作用(Bransford & Donovan, 2005; Fischer & Bidell, 2006; Kegel et al., 2011),不同学科学习的脑机制研究,等等。

对学习的研究表明,儿童的学习非常灵活。每个儿童的脑都各不相同,因而必须采用不同的方式来学习。同时,每个儿童在掌握自己最需要的技能方面都十分成功,比如交流和运动控制技能(Immordino-Yang et al., 2009; Immordino-Yang et al., 2012)。研究儿童不同的学习方式,最终将在教育实践中产生重要的进步。我们需要年轻的研究者同中小学、幼儿园的教师共同努力,将研究与实践结合起来:其一,制订教师专业发展计划,为职前教师和在职教师开设教育神经科学的培训课程,支持研究者与中小学、幼儿园教师合作。这一建议也符合2012年"联合国学术影响力"等组织在《模糊学科界限:国际教育发展大会宣言》中提出

的要求(College of Education，Georgia State University，United Nations Academic Impact Committee on Teaching about the United Nations，Seoul National University，2012)。其二，开设专业培训课程，培养新一代的教育研究者与教育实践者，如2000年在哈佛大学开设的心智、脑与教育专业课程(http：//gseweb. harvard. edu/～mbe)。

教育神经科学不可能为这一发展过程提供捷径。让脑科学研究者与教育者合作，共同揭示教育情景中的学习是如何发生的，这需要假以时日。开展实践研究来探索学生高效率或低效率学习的原因也需要时间。教师和其他教育者必须开始探索脑的加工过程对学习的作用，而科学工作者和研究者则必须开始探索如何测量学习发展轨迹的多样性(Stein et al.，2010)。教师教育中必须加入教育神经科学的知识，因为脑是学习的重要器官。

学习发展轨迹的重要作用

新一代的教育工作者能够改变教育研究的状况。他们需要学习认知科学和脑科学的知识，提出有关教与学的实际问题并加以解决，从而为教育奠定坚实的研究基础。但是目前，教师教育很少关注学生的学习，而更多地关注课堂管理和学校组织，有时也涉及社会中的公平和差异问题。这些问题的确非常重要，但如果学校的核心目标是为了促进学生的学习和发展，那么教育者就应该把重点放在研究和分析学生的教与学的问题上。

对学习的关注应该始于这样一个研究假设，即不同的学生有各不相同的学习方式。教育神经科学运用"全人"的观点来研究不同儿童的学习；这种"全人"的观点包括人际关系、情绪、艺术、社会交往与学习差异，以及学习的强项与弱项的交互作用(Fischer，Bernstein & Immordino-Yang，2007；Immordino-Yang et al.，2009)。有效学习环境的设计必须考虑到"全人"的发展，考虑学生个体之间的关系以及每位学生不同技能

中强项与弱项之间的关系。

即使在教育神经科学发展的早期,我们也已经清楚地知道,儿童的学习是按照特定的轨迹发展的,从而形成技能和特定内容的概念知识。儿童会发展出理解美国历史的学习轨迹、数学学习的轨迹、弹奏吉他的学习轨迹,等等。这些学习发展的轨迹大多彼此独立,按照不同领域的技能组织起来。

通过与发展性测试服务中心(Developmental Testing Service, DTS)(www.devtestservice.org)的合作,我们开发了分析道德判断、决策、批判性思维等学习发展路径的工具。DTS创造了许多重要的革新方法来促进对学生学习发展路径的测评。这些分析学习发展路径的工具全面勾勒了学生学习特定内容的常用学习方式(Fischer & Bidell, 2006; Stein et al., 2010)。阅读就是一个很好的例子。学生是通过多样化的而不是单一的途径学会阅读的,不同语言的学习方式有所不同。例如,患有阅读障碍的学生学习英语阅读的方式与普通学生不同,可能由于他们脑组织中某个部位的缺陷导致了阅读困难(Shaywitz & Shaywitz, 2007)。在阅读困难的研究中形成了一种新的观点:许多存在阅读困难的人似乎具有不同的视觉系统,他们的视觉系统结构不同于常人,其边缘视野比常人更敏锐,这种差异在完成视觉任务时具有许多优势,比如在需要整合大范围视野信息时,阅读困难者的技能更具有优势。研究结果表明,这种视觉系统在某些视觉任务中占有优势,特别是需要处理并运用视野边缘信息的任务。例如,患有阅读障碍的天体物理学家在搜索天空、探测黑洞时显示出巨大的优势(Schneps et al., 2007)。阅读障碍者在分析图片的逻辑错误方面似乎也有显著的优势,如分析不可能图形。在逻辑上,这种图形在真实世界中是不可能存在的,却可以通过两个(或三个)维度画成,而许多阅读障碍者发现这个"视觉逻辑"错误的速度比常人快。阅读障碍者还能够比常人更快地发现照片边缘的错误和异常(Schneps et al., 2007),这可能是艺术院校中阅读障碍者的数量更多的原因。

芬克(Rosalie Fink, 2006)访问并评估了许多患有阅读障碍的成功人

士。这些阅读障碍患者成功地掌握了读写技能，他们学习读写的方法不同于常人，但是没有得到标准阅读课程的重视。在被问及是如何学习阅读的，这些成功人士说，他们找到了另一条掌握阅读的途径，即受强烈的个人兴趣的驱使，比如对动物、除草机或内战，从而学会了阅读（Fischer & Fusaro，2007）。这些人的成长环境中还没有电脑或手机，因此，阅读成为获得自己感兴趣的信息的有力工具。虽然他们患有阅读障碍，但是他们自然而然地选择书籍来阅读。学校并没能很好地教会这些患有阅读障碍的成功人士阅读。在成人的支持下，他们自己摸索出适合自己的阅读方式，并学会了阅读。

教与学的一个最重要的起点是假设学生有不同的学习方式，并寻找适合每一个学生的有效学习方式。在这个领域，学习的研究开始对教育实践作出重要贡献：当教师能够帮助学生找到有效的学习方式时，就能为不同的学生提供支持，让他们通过不同的方式进行学习，进而开始分析不同的人有效学习的不同方式。

学校最重要的目标是帮助学生成为有教养的人，成为对社会有用的公民。另一个目标就是掌握大量的技能来增进学生的知识，增强学生的动机、责任感和创造力。只有当学校的教育实践奠基于不同学习方式的科学知识时，它才能真正地教育所有公民（Fischer，2009；Hinton & Fischer，2008）。

脑是学习的重要器官。对有效的教与学的实际问题展开研究，最终将形成各种工具来提高全世界的教育质量。然而，教育神经科学仍然很年轻，作为一门学科，它才刚刚诞生，希望快速解决教育难题的人肯定会对此感到失望。促进全世界教育的最重要的目标是开展实践研究来评估教与学的有效性。教育神经科学的研究有助于提出这些问题，但教育家和科学家应该共同合作来创建这门新的学习科学，共同塑造儿童的脑。

目前，教育神经科学已经在全世界范围内蓬勃发展起来。本丛书精心选择了国际上在这个领域具有重要影响的优秀著作进行翻译。丛书面向教育界与心理学界的实践者和研究者，目的是联结脑、认知科学与教育

政策和实践，因此，丛书选择了与学校教育密切相关的著作，有的侧重数学、语言、音乐等学科教学，有的侧重将研究与实践联结起来的新型研究范式。这些著作从不同侧面勾勒出国际教育神经科学研究的广泛与精深。在中国这样一个人才大国，教育神经科学的发展将对人才培养与综合国力的提升发挥十分重要的作用，是我国迈向人才强国的有力途径。同时，中国的教育神经科学研究也将对国际教育神经科学的发展作出重要的贡献。我们期待这套丛书能够吸引更多有志于教育神经科学研究的研究者、关注转化应用的教育政策制定者和教育实践者积极投入到这个新兴的领域，为创建我国本土化的教育神经科学共同努力。

在本丛书出版之际，我们由衷地感谢教育部社会科学司、教育部留学基金委员会、中国博士后科学基金会、上海市教育委员会、上海市人力资源和社会保障局、北京市教育委员会对新兴学科的大力支持。感谢韦钰院士、沈晓明教授、董奇校长、俞立中校长、任友群副校长、唐孝威院士、陈霖院士、钟启泉教授、李其维教授、周永迪教授、桑标教授、杜祖贻教授、黄红教授、金星明教授为中国教育神经科学发展所作出的贡献。衷心感谢上海教育出版社袁彬副总编及其团队在出版本套译丛过程中所做出的努力。感谢各位参与翻译的教授和研究生认真负责的翻译工作，使得本丛书能够与中国读者见面。

我们期待着中国教育神经科学的美好明天。

参考文献

Battro, A. M., Fischer, K. W. & Léna, P. (eds.) (2007) *The Educated Brain: Essays in Neuroeducation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Bransford, J. & Donovan, S. (eds.) (2005) *How Students Learn: History, Science, and Mathematics in the Classroom*. Washington, DC: National Academy Press.

Fink, R. P. (2006) *Why Jane and Johnny Couldn't Read — and How They Learned*. Newark DE: International Reading Association.

Fischer, K. W. (2009) Mind, brain, and education: building a scientific groundwork for learning and teaching. *Mind, Brain, and Education* 3: 2 - 15.

Fischer, K. W., Bernstein, J. H. & Immordino-Yang, M. H. (eds.) (2007) *Mind, Brain, and Education in Reading Disorders*. Cambridge UK: Cambridge University Press.

Fischer, K. W. & Bidell, T. R. (2006) Dynamic development of action and thought. In W. Damon & R. M. Lerner (eds.) *The Oretical Models of Human Development*. *Handbook of Child Psychology* (6th ed., Vol. 1, pp. 313 - 399). New York: Wiley.

Fischer, K. W., Daniel, D. B., Immordino-Yang, M. H., Stern, E., Battro, A. & Koizumi, H. (2007) Why mind, brain, and education? Why now? *Mind, Brain, and Education* 1: 1 - 2.

Fischer, K. W. & Fusaro, M. (2007) Eager to learn: using student interests to motivate learning. In R. P. Fink & J. Samuels (eds.) *Inspiring Success: Reading Interest and Motivation in an Age of High-stakes Testing* (pp. 62 - 74). Newark DE: International Reading Association.

Fischer, K. W. & Heikkinen, K. (2010) The future of educational neuroscience. In D. Sousa (ed.) *Mind, Brain, and Education: Neuroscience Implications for the Classroom* (pp. 249 - 269). Bloomington IN: Solution Tree Press.

Gabrieli, J. D. E. (2009) Dyslexia: A new synergy between education and cognitive neuroscience. *Science*: 225, 280 - 283.

Graham, P. A. (2005) *Schooling America: How the Public Schools Meet*

the Nation's Changing Needs. New York, NY: Oxford University Press.

Gura, T. (2005) Educational research: big plans for little brains. *Nature*, 435 (7046): 1156 - 1158.

Hinton, C. & Fischer, K. W. (2008) Research schools: grounding research in educational practice. *Mind, Brain, and Education*, *2*(4): 157 - 160.

Immordino-Yang, M. H. & Damasio, A. (2007) We feel, therefore we learn: the relevance of affective and social neuroscience to education. *Mind, Brain, and Education*, 1 (1): 3 - 10.

Immordino-Yang, M. H., McColl, A., Damasio, H. & Damasio, A. (2009) Neural correlates of admiration and compassion. *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 106(19): 8021 - 8026.

Immordino-Yang, M. H., Christodoulou, J. A. & Singh, V. (2012) Rest is not idleness: implications of the brain's default mode for human development and education. *Perspectives in Psychological Science*, 7(4): 352 - 364.

Kegel, C. A. T., Bus, A. G. & van IJzendoorn, M. H. (2011). Differential susceptibility in early literacy instruction through computer games: the role of the dopamine D4 receptor gene (DRD4). *Mind, Brain, and Education*, 5(2): 71 - 78.

Lesser, G. S. (1974). *Children and Television: Lessons from Sesame Street*. New York: Random House.

Schneps, M. H., Rose, L. T. & Fischer, K. W. (2007). Visual learning and the brain: implications for dyslexia. *Mind, Brain, and Education*, 1(3): 128 - 139.

Shaywitz, S. E. & Shaywitz, B. A. (2007) What neuroscience really tells us about reading instruction. *Educational Leadership*, 5: 64, 74 - 76.

The Declaration of 'Blurring Boundaries: An International Educational Development Conference'. (2012) Sponsored by Georgia State University, United Nations Academic Impact, Committee on Teaching about the United Nations, Seoul National University. (http: //outreach. un. org/unai/2012/06/27/the-declaration-of-blurring-boundaries-an-international-educational-development-conference-issued)

Thomas, C. & Susan, M. (2010) Neuroscience and education: an ideal partnership for producing evidence-based solutions to guide 21st Century Learning. *Neuron*, 67(5): 685 - 688.

台湾师大新闻. 迈向顶尖大学计划一大创举，教育神经科学实验室揭牌启用[N]，2012.

周加仙. 教育生物学的领域建构[J]. 教育生物学杂志，2013(2).

关于作者



戴维·A.苏泽(David A. Sousa),教育学博士,国际教育顾问。他曾在全国性的教育大会上进行演讲,并在数以百计的学区和美国、加拿大、欧洲、亚洲和澳大利亚等地的大学和学院中设立脑科学研究和科学教育的工作坊。

苏泽博士在布里奇沃特的马萨诸塞州立学院获得化学学士学位,在哈佛大学获得教育艺术的文科硕士学位,并在罗格斯大学获得博士学位。他具有在各年级执教的经验,教授过高中科学,担任过 K-12 的科学主任,并在新泽西州西奥兰治的学校担任过教育督导一职。后来,他成为新泽西州新普罗维登斯公立学校的负责人。他还是西顿霍尔大学的兼职教授、罗格斯大学的客座讲师,1992 年担任美国国家员工发展委员会(National Staff Development Council)主席。

苏泽博士编辑过科学书籍,并在教育核心期刊上发表过关于教师发展、科学教育以及脑科学研究的文章,还出版过大量相关书籍。由于在研究、教师发展和科学教育领域的付出和贡献,他曾获得多项由专业协会和学区颁发的奖项。他还获得了布里奇沃特

(马萨诸塞州)州立学院颁发的“杰出校友奖”和教育学名誉博士学位。

苏泽博士是认知神经科学学会的成员。他曾参与美国国家广播电视公司(NBC)的“今日秀”(Today Show)节目以及美国国家公共广播电台的节目,讨论将脑科学研究应用于学校教育的工作。目前,苏泽博士及其家人居住在南佛罗里达州。

致 谢

科温出版社(Corwin)向以下人员对本书的贡献表示由衷的感谢:

Patricia Allanson, Seventh/Eighth-Grade Mathematics Teacher, Deltona Middle School, Deltona, FL

Carol Amos, Mathematics Teacher, Twinfield Union School, Plainfield, VT

Jim Barta, Associate Professor, Elementary Education, Utah State University, Logan, UT

Janice Bradley, Project Coordinator, Mathematically Connected Communitities, New Mexico State University, Las Cruces, NM

Deborah Gordon, Third-Grade Teacher, Madison School District, Phoenix, AZ

Elizabeth Marquez, Mathematics Assessment Specialist, Educational Testing Service, Princeton, NJ

Renee Ponce-Nealon, Third-Grade Teacher, FSUSD, Tolenas Elementary School, Fairfield, CA

Daniel Raguse, President, The Math Learning Center, Salem, OR

Rita Smilkstein, Faculty Emerita (English), North Seattle Community College, Invited Faculty, Western Washington University's Woodring College of Education, Seattle, WA

Kimberly C. Smith, Eighth-Grade Mathematics Teacher and

Mathematics Department Chair, A. Laurin Welborn Middle School, High Point, NC

Robert Sylwester, Emeritus Professor of Education, University of Oregon, Eugene, OR

Mary L. Thoreen, NBCT, Mathematics Teacher, Wilson Middle School, Tampa, FL

Keith H. Weber, Assistant Professor, Graduate School of Education, Rutgers University, New Brunswick, NJ

目 录

前　言

数字统治万物。

——毕达哥拉斯(Pythagoras)

一、人人都能学数学

人类生来就具有一些非凡的能力，其中一项是语言。仅仅在出生后几年的时间里，蹒跚学步的孩子不需要任何专门指导就可以开始进行对话。而在接下来的几年里，他们说的句子越来越复杂，词汇量也呈指数级增长。在10岁之前，他们已经能够理解大约1万个单词，并且运用母语的准确率达到95%。

> 我们经常听到有孩子们叫嚷："我不会数学"，却从没听到有孩子说："我不会说话！"为什么会有这样的不同？

另一项天生的能力是数感——一种能够知道一小堆物体的数量，会数数，不用专门教就会简单加减法的能力。然而，即使到了10岁，还是有孩子会叫嚷："我不会数学"，可我们从没听到有孩子说："我不会说话！"为什么会有这样的不同？

一个可能的原因是，口头语言和数感是攸关生存的技能，而抽象的数学却不是。我们生来为在非洲热带草原上生存而设计的大

2 脑，到了小学阶段却要面对复杂的符号和程序。人类文化和社会在近五千年来发生了巨大的变化，但人的大脑却没有改变。那么，大脑将如何面对那些未曾准备好的问题？比如，如何将两个两位数的数字相乘？借助现代脑成像设备，我们可以看到活体大脑的内部。我们能看到，当需要解决那些难以靠天赋来应付的问题时，大脑皮层的哪个回路会参与。人类大脑能够应对这种挑战的事实证明，人类拥有卓越的对环境进行评估和计算的能力，这种能力能将人类安全地送上月球，并且能将航天探测器发射到数千万英里以外的行星周围。

1. 为什么学习数学这么难

学好高中数学不是一件容易的事。2005 年，美国国家教育进展评估(National Assessment of Educational Progress，简称 NAEP)对 9 300 名高中生进行的数学测验结果显示，有 39%的人在基本数学技能上的表现低于熟练水平。由于 2005 年的测试与过去的版本相比有很大变化，所以没法跟以前的测试作直接对比。但是，居然有将近 40%的高中生在基础数学上连最起码的熟练程度都达不到，教育者或家长对这样的结果都感到不满意。在四年级学生中，这一比例上升了 3 个百分点；八年级学生在满分 500 分的试题中，2005 年的平均分仅比 2003 年高了 1 分，这种增长实在是微乎其微(NAEP，2007)。

学者们纷纷对这一乏善可陈的成绩进行解释。有人说，学数学难是因为数学太抽象，需要更多逻辑性和条理性的思维；有人说在数学中使用各种各样的符号更像是在学外语。但教育评论家坚持认为，只有少数学生真正缺乏解决数学问题的能力，而那些糟糕的表现主要是因为缺乏适当的教育。他们认为，所谓"数学战争"阻碍了数学课程开发的重大进展，正如 20 世纪 90 年代的"阅读战争"对阅读教育的影响一样。

2. 数学教育者的回应

美国国家数学教师委员会(National Council of Teacher of Mathematics，简

3 称 NCTM)于 2000 年出版了《学校数学教学原则与标准》(*Principles and Standards for School Mathematics*)，对从幼儿园[①]到高中的数学教学提出了五个过程标准和

① 此处原文为"prekindergartern"。在美国，这是为 3～5 岁儿童开设的非强制性的教育机构；而美国所谓的幼儿园(kindergarten)，指的是为 5～7 岁进入小学前阶段的儿童开设的义务教育机构，更类似我们学前班的概念，因此译者在此把 prekindergartern 翻译为幼儿园，更为贴近我国的实际情况。——译者注

五个内容标准(NCTM, 2000)。之后,小学和中学各年级对于该标准的演绎越来越宽泛,以致NCTM最终决定重新聚焦,针对各年级的水平进行课程设置。

2006年,NCTM发布了《课程焦点》(*Curriculum Focal Points*),这本书为从幼儿园到八年级的每个年级都设定了三个重要的数学主题,称为"相关知识、技能和概念的衔接组块",这三个组块为理解高级数学概念奠定了必要基础。该书致力于将目前使用的各种不同版本的数学教材统一化,并为各州和地区从幼儿园到八年级的数学课程开发而设计更有针对性的课程规划和教学评估提供了框架。这次新的尝试能否促进学生的数学学习,我们将拭目以待。与此同时,教师每天走进教室时都要准备好帮助他们的学生建立充分的信心,从而掌握数学原理和运算。有件事似乎是可以肯定的:那些小时候数学学得不好的学生,他们在以后的数学学习中仍然会表现不好。

二、关于本书

一直以来,总有人要我给出具体的例子来说明科学研究成果究竟是如何作用于教育实践的。现在回答这个问题相比15年前容易多了,因为近年来,认知神经科学的发现使我们对人脑有了更为深入的了解。借助脑成像技术,我们能够了解短时记忆和长时记忆系统,了解情绪对学习的作用,了解我们怎样获得语言和运动技能,以及人脑是怎样学会阅读的。但直到最近,研究者们才开始密切关注计算和数学运算加工过程中的神经机制。

1. 本书要回答的问题

- 什么数学能力是我们与生俱来的?
- 在没有专门指导的情形下,孩子们能学到多少数数和基本计算的本领?
- 为什么亚洲的语言能使他们的孩子比说英语的孩子更早更快地学会数数?
- 什么样的数词体系能够帮助说英语的孩子更快更容易地学会数数?
- 为什么学习数学对这么多学生来说如此困难?

4

- 当前的研究对算术学习的日常课堂教学有什么启示?
- 人脑是如何应对抽象数学概念的?

- 哪些有效的策略能够帮助有阅读困难的学生学习数学？
- 对于表现出数学学习困难的学生，我们如何判断这种困难是环境因素所致还是发展性缺陷所致？
- 数学教师设计课程时应该考虑哪些策略？
- 脑成像研究揭示的计算障碍的本质是什么？
- 中小学教师如何准确地鉴别数学学习困难的学生？
- 哪些教学策略对于帮助数学学习困难的学生最为有效？
- 教师如何将脑与数学的研究成果应用于从学前到高中的数学教学方案的设计？

2. 内容提要

第一章——发展数感。儿童确定数量的能力在出生后不久开始形成。本章将剖析这种天生数感的成分，探讨天生数感如何引导儿童数数和进行基本的计算操作。本章将介绍协同工作并处理计算的脑区，以及语言是如何让孩子更快地学会数数的。

第二章——学习计算。由于计算大数目并非生存的必备技能，因此人脑必须学习数学概念和流程。本章深入探讨了人脑理解数字关系和操作所必须历经的各个阶段(比如，在学习乘法的过程中，人脑为什么会把学习乘法看成一种非自然的行为)，并且提出了一些可能让乘法教学变得更容易的方法。

第三章——回顾学习的基本要素。本章呈现了近年来认知神经科学的一些发现，包括有关记忆系统、练习和复述的性质与价值、课程时间安排和写作在数学课堂上的益处等方面的研究。

第四章——教学龄前儿童学数学。虽然幼儿具有天生的数感，但一定的教学策略能够增强这种能力，并能让幼儿为以后更好地学习运算做好准备。本章提供了一些相关策略的建议。

第五章——教前青春期的学生学数学。我们在此观察了前青春期少年的脑的发展和特点及其对个体情绪和理性行为的影响。本章为从小学到中学阶段的教师如何根据在这个阶段处于发展中的脑的特性修改课程计划提供了建议，从而使更多的学生能够成功地学习数学。

第六章——教青春期学生学数学。与前一章类似，我们回顾了处于青春期

的青少年的脑的特性，提出了应该如何根据脑的需要修订课程。其中包括对数学推理以及教学选择的讨论，比如对课程和组织图进行分层，这可能是一种能让数学与今天的学生更相关的有效策略。

第七章——认识和解决数学学习困难。本章提出了大量建议，让教师能够识别并帮助学生克服数学学习中遇到的困难，包括数学焦虑。本章讨论了可能造成数学学习困难的环境因素和发展因素之间的主要区别。本章还提出了一些测试策略，可供各年级教师帮助那些数学成绩差的学生理解数字运算，并对数学概念形成更为准确和深刻的理解。

第八章——综述：从学前到高中的数学课程规划。什么是数学？我们如何将前面章节所讨论的重要发现应用于日常实践？本章提出了将此类研究整合进数学课程规划的建议，并呈现了适用于从学前到高中的数学教学的四步教学模式。

3. 其他有用的工具

在各章的最后，你会发现有一个名为“本章反思”的栏目，这个小工具是为了帮助你记住那些重要的观点、策略和文献，以备日后不时之需。

我已经在有关数学历史的信息中加入了一些我认为有意思的信息，还加入了一些人文观点。在整本书里，我参考了科学研究的一手文献，并尽可能列出了相关引用文献。

请注意“√”。大多数章节都包含了如何将关于数学学习的研究转换为教育实践的建议。这些建议都以符号“√”标记。只要你见到这个符号，就表示这是供你参考的策略！

在这本书的后面，我列出了为各年级教师和学生提供各种活动的大量网站资源。 6

本书并不是一本介绍从学前到高中的各种数学活动的教学参考书。它是一本介绍基于认知神经科学所研究的人脑处理数字和数学关系理念的教育方法的书。当然，这其中所建议的一些活动代表了我个人认为如何能将研究成果转化为课堂实践的观点。但这些

> 这本书并不是一本关于数学活动的书。这本书的设计更像是为了帮助教师根据当前对于人脑如何学习数学的研究，来判断哪些书和活动可能是有效的。

观点通常只是建议活动的类型而非明确的活动。市场上有上百种关于数学活动、游戏和工作表的图书、计算机程序,还有网络资源。这本书是为了帮助教师来判断,根据现有的研究,哪些书和活动可能是有效的。

在此呈现的信息都来自目前已公布的研究成果。然而,随着科学家对人脑功能的不断开发,他们可能会发现更多的参与数学学习的大脑皮层活动机制。这些发现将帮助父母和教育者更多地了解数学的特性、数学学习的困难和有效的数学教学方法。敬请期待!

7

三、评估你目前在应该如何学习数学方面所掌握的知识

这本书使你增长了多少关于人们如何学习数学方面的知识可作为衡量本书价值的指标之一。现在进行以下正误判断测验,评估一下你目前对于一些与数学和数学教学相关的概念的理解程度。判断下列陈述总体上是正确的还是错误的,并在T(正确)和F(错误)上画圈。问题的答案可以参见书中的文本框部分。

1. T F 人脑首先将数字理解为一个词,然后才理解为数量。
2. T F 学习乘法同学习口头语言一样,也是一种自然能力。
3. T F 判断两个大数的大小比判断两个小数的大小要容易。
4. T F 在所有文化中,工作记忆的最大容量都是7个项目。
5. T F 数学中的性别差异更有可能是由于遗传而不是由于文化因素的影响。
6. T F 练习数学解题步骤可以熟能生巧。
7. T F 在常规计算中采用技巧,可以加深理解并提高数学成绩。
8. T F 数字符号的运算与大脑的语言区紧密联系。
9. T F 初中学生对于数学的态度近几年来得到了极大改善。

四、下章预告

什么样的数字能力是我们与生俱来的?学校在教算术时利用了这些能力吗?母语对我们学习数数有何影响?关于这些有趣的问题,你们将在接下来的一章中发现答案。

第一章　发展数感

数字之所在，即美之所在。

——普罗克鲁斯(Proclus，410—485)

一、婴儿能数数

1980年，普伦蒂斯·斯塔基(Prentice Starkey，1980)邀请了72位母亲带着她们的婴儿到宾夕法尼亚大学的实验室参加一项新奇的实验。婴儿年龄在16周到30周之间，每个婴儿都坐在母亲的腿上观看屏幕上的幻灯片。每张幻灯片上都有2～3个水平排列的大的黑色圆点。斯塔基改变点之间的空间距离，使婴儿不能通过行的总长度和点的密度来区分数量。多次实验之后，斯塔基注意到，婴儿对有2个点的幻灯片平均注视时间为1.9秒，而对有3个点的幻灯片，平均注视时间则为2.5秒(32%的增长率)。这说明婴儿能觉察到点从2个到3个的数量变化。

在后续的实验中，匹兹堡大学的施特劳斯和柯蒂斯(Strauss & Curtis，1981)重复了这项设计，但用常见物体的彩色照片代替了点。物体的大小和排列发生了变化，只有数量是不变的。婴儿仍然注意到2个和3个物体之间的差异(见图1.1)。不同的研究者做了很多类似的关于婴儿的实验，最近的一次是2006年的一个实

10

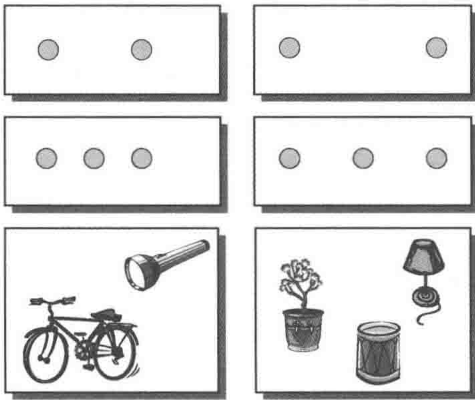


图 1.1　研究者使用幻灯片来证明儿童能识别数量 2 和 3

画点的幻灯片类似于斯塔基(Starkey, 1980)所使用的,而呈现物体的幻灯片是施特劳斯和柯蒂斯(Strauss & Curit,1981)在实验中所使用的。

验(Berger, Tzur & Posner, 2006)。他们也得到了同样的发现:在生命的最初几个月,婴儿能注意到物体的恒常性,并且能觉察到数量之间的差异。当然,婴儿并没有计数的复杂概念,但他们有量的概念,或科学家所谓的(集合)数量(numerosity)的概念。

数量概念是天生的,还是婴儿在出生后的最初几个月学到的?新生儿能区分 2 个物体与 3 个物体的不同,甚至可能区分 3 个物体与 4 个物体的不同。他们的耳朵能区分 2 个声音与 3 个声音的不同。新生儿似乎不可能在出生后短短几个月的时间里就从环境中搜集到足够的信息学到数字 1、2、3,因此,这种能力似乎有着一种强大的遗传成分。

针对丧失或从未有过数感的病人开展的个案研究,为数量概念是预置于大脑中的观点提供了更多的支持。例如,巴特沃思(Butterworth,1999)描述了一位中风病人,他的语言和推理能力都完好无损,却不能估计或识别任何一组物体的数量。另一位病人做了一项手术,她的大脑左侧被切除了一个肿瘤,数字对她来说是没有任何意义的。同样,这位病人的语言能力和一般智力没有受到影响,但她甚至学不会用手指做加法运算,乘法表对她而言也不过是一首无意义的歌谣。巴特沃思还描述了一个尽管拿到了心理学的本科学位,但似乎从来都未拥有过数感的人。虽然答案对他来说没有意义,但他不得不借助手指来做简单的数学运算,借助计算器完成其他运算。他不能判断两个数字哪个更大,就连在一堆东西里迅速数出三个物体也不能做到。

迪昂(Dehaene,1997)考察了一个人的数感在中风后是如何被破坏的。一位病人数到一组物体中的一半就停止了数数,因为她认为已经数完了所有的物体。另一位病人则一次又一次地重复数相同的物体,并坚持认为有 12 个物体(其实只有 4 个)。他们的共同点是语言能力和一般智力都没有受到影响。从大量的个案研究中仅仅举出这几个例子就足以得出一个结论:我们天生拥有数感!

1. 什么是数感

托拜厄斯·丹齐克(Tobias Danzig,1967)于1954年引入了“数感”这一术语,将之描述为在个体没注意到的情况下,在一小堆物体中增加或移除一个物体后,个体能够意识到这堆物体发生了变化的能力。我们拥有数感,是因为数对我们而言是有意义的,就像词语和音乐一样。我们一出生就拥有数感,或者说在非常小的时候就能毫不费力地获得这种能力。数学家基思·德夫林(Keith Devlin,2000)提炼数感的定义,认为数感由两个重要的成分组成:同时比较两组物体多少的能力和及时记住连续呈现的物体数量的能力。

11

> 因为我们一出生就有数感,所以大多数人都有可能在算术和数学中做得比我们想象的好得多。

我们出生时就有数感并不意味着我们所有人都能成为数学家,但它意味着大多数人都可能在算术和数学中表现得比我们想象的好得多。如果这是真的,那么为什么还有如此多的学生和成人说他们“不会数学”呢?稍后我们将回答这个令人疑惑的问题。

2. 动物也有数感

动物研究者对于婴儿具有数感的发现并不感到惊奇。早在50多年前,实验已经显示,鸟(Koehler, 1951)、老鼠(Mechner & Guevrekian, 1962)、狮子(McComb, Packer & Pusey, 1994)和黑猩猩(Woodruff & Premack, 1981)都拥有先前德夫林所提出的数感。

当然,不同的动物种类表现出的数感的复杂水平各不相同。例如,许多鸟类能够按照一定的次数来重复某种特定音调的叫声,这表明它们拥有数感。甚至同一种类的成员还能学会通过重复同样的次数来表示某种方位,比如,重复6次可能表示一片林地,而重复7次可能表示另一片林地。

老鼠和狮子似乎有估计和比较数字的能力。动物中具有比较数字能力的群体具有明显的生存优势,这将有助于一群动物决定当防卫者数量超过攻击者时是否要保卫它们的领地,或者当攻击者数量多时是否要撤退。值得注意的是,我提到的是动物“估计”和“比较”数,而不是“数数”。没有人认为动物能精确数数,如1……2……3或11……12……13。相反,大多数研究者认为,很

多动物能识别1个和2个物体之间的差异，此后可能只是有“多于2个”的概念。

进化图谱中跟我们关系最近的黑猩猩又如何呢？实验表明，黑猩猩能进行基本的计算。例如，在一项使用巧克力棒的实验中，黑猩猩能认识到3根棒加4根棒等于7根棒，5根棒加1根棒等于6根棒，他们也能辨别6根棒比7根棒少。然而，黑猩猩并不能精确地数到6或7，而更像是从视觉上比较出一个总和比另一个更多(Woodruff & Premack, 1981)。

12

老鼠和黑猩猩所表现出来的数量估计能力与人类婴儿所具有的先天数感极为相似。每当出现一个外部刺激时，动物可以通过增加一个内部筹码来计数，如老鼠通过按压杠杆来获得食物。但它们对数字的表征是模糊不清的，而人类能做的要多得多。仅仅几个月大的孩子就能发觉数和数字词按一种精确的顺序排列，并且他们很快就会将与生俱来的能力扩展成为能够精确数数，甚至能数到数十亿之多数量的能力。

3. 我们为什么会有数感

数感之所以成为人类和其他动物所具有的一种与生俱来的能力，很可能是因为数感对它们的生存具有重要作用。在荒野里生存的动物必须时常评估所处环境中的危险和机遇。为此，它们需要大脑系统快速地计算出任一行动的相关量。正如原始人寻找食物时，也必须快速地确定所侦察到的动物数量对他们来说是机会还是危险，它们是否跑得太快，是否因为个头太大而捉不到，或者是否距离太远。这些计算中出现任何一个错误都可能致命。因此，擅长判断这些数量的个体就能生存下去，并且强化了他们的族群在数感上的遗传能力。

> 为了生存，人类和其他动物具有一种与生俱来的数感。

4. 皮亚杰和数感

当代关于数感的研究极大地颠覆了50年前皮亚杰构建主义的观点。他声称新生儿带着一块空白的认知白板来到世界上(还记得“白板说”吗)，然后从所处的环境中搜集信息，逐渐构建出对周围世界的清晰的理解。皮亚杰(Piaget, 1952,1954)开展了多项试验并得出结论，认为不到10个月大的小孩尚未意识到

物体是永恒的，这就是他所说的“客体永久性”。他也认为儿童并没有数感，他们不能掌握数量守恒的概念——对一组物体重新排列，并不改变其数量的概念——直到大约5岁时才有这种守恒的概念。此外，皮亚杰和追随他的建构主义者认为，儿童到7岁或8岁才能形成算术的概念。 13

由于皮亚杰的结论是基于实验心理学提出的，因此他的研究极大地影响了教育思想。许多教育者将皮亚杰的研究解读为儿童到6岁或7岁才会计算。过早地教授算术将会适得其反，因为这可能让儿童产生扭曲的数字概念，幼儿即便是在简单算术运算学习中过早地遇到挫折，也会让他们对数学产生焦虑感。根据皮亚杰的理论，教师最好是从逻辑和集合顺序开始教，因为这些知识对于掌握数字概念是非常必要的。这些观念在今天的很多幼儿园里依然很流行。

人们所坚信的皮亚杰理论有道理吗？当今的研究者意识到，皮亚杰的很多关于儿童的实验程序是有缺陷的，因此导致了错误的结论。我们先前提到鸟和老鼠如何轻易地识别一定物体的数量及其空间排列，黑猩猩能自发地从两组食物中选择数量较多的一组，那么，为什么儿童非要等到4岁或5岁才能开始获得与动物相同的计算能力呢？我们已经知道了答案：他们不用等到那个时候。人类婴儿在计算上和动物一样具有天赋，他们掌握数字概念的能力在他们生命的第一年就得到快速发展。

二、学习数数

尽管婴儿生来就具有与在老鼠和黑猩猩身上表现出的相同的基本数感，但他们拥有能将他们与其他动物迅速区分开的两种运算能力。一种是数数能力，另一种是使用和操作表征数量的符号的能力。

识别一小组物体数量的能力是先天数感的一部分，它不需要数数，因为数量能被快速地识别出来。研究者称这个过程为感数（来自拉丁语“突然”），但当集合中的数字超过感数的限度时，就需要数数了。

1. 感数 14

先天的视觉加工系统使我们能够知道一堆物体的数量，我们不需要精确地数就能又快又准地确定4个或更少的物体数量。但随着集合中物体数量的增

加，感数的精确性就会逐渐丧失。随着物体的增多，加工速度就会减慢，因此我们便会放弃感数而转向数数，或是基于从集合中辨别出的视觉形态进行估计。为什么会这样呢？这可能是因为感数是一种原始的大脑加工过程，而数数则涉及更复杂的操作。

的确，最近的 PET 扫描研究似乎说明了这个推论。当研究中的被试感知 1～4 个物体时，大脑的视觉皮层区域被激活，而与注意力相关的区域未被激活。然而，当数 5～8 个物体时，被试众多的大脑网络被激活，包括涉及视觉注意力的大脑顶部区域以及与认知加工有关的大脑前部区域。这些研究表明，感数是一种低等的潜意识操作（神经科学家称之为前注意），而数数则激发了重要的大脑皮层活动（Piazza，Mechelli，Butterworth & Price，2002；Sathian，Simon，Peterson，Patel，Hoffman & Grafton，1999）。

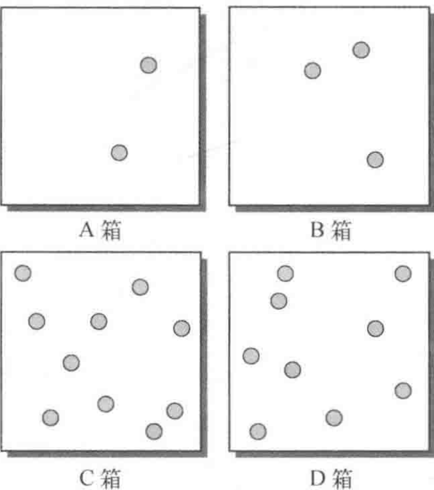


图 1.2 感数和数数实验

我们能很容易地通过感数察觉到 2 个和 3 个物体之间的区别，但随着项目量的增加，我们需要通过数数获得精确的结果。

图 1.2 显示了感数和数数的差异。看一下 A 箱和 B 箱，不需要数，你的眼睛便能快速检测到箱子中 2 个和 3 个物体之间的不同。C 箱中有多少个点呢？D 箱呢？你可能不得不依靠数数来确定每个箱子里点的数量。这表明感数很可能是学习数数技能的先决条件。如果是这样的话，我们应该更密切地关注感数并搞清楚增强这种技能是否会帮助儿童更容易地学习数数。

感数类型

克莱门茨（Clements，1999）描述了两种类型的感数：知觉性的和概念性的。知觉性感数是指不需要进行其他数学加工便能感知数量，就像看到图 1.2 中 A 箱和 B 箱时的反应。这种本能的大脑加工机制与动物所使用的机制非常相似，并且可以解释本章前面所描述的婴儿的某些令人惊讶的能力。知觉性感数也有助于儿童将集合中的物体分成一个一个单位，然后将每个单位跟一个数词相连接，这样就发展出了数数的过程。

15

概念性感数是人们通过识别某一种相似模式来获知集合的数量，如骰子或多米诺骨牌上点的空间排列。还有其他的类型，可能是触觉模式的，如使用手指解决加法问题；或者节奏模式的，如每次数数都用手一个一个地敲打出来。创造和使用概念性感数模式有助于儿童掌握数数所需要的抽象数字和算术策略（Clements，1999；Steffe & Cobb，1988）。那些不会概念性感数的儿童学习基本的数学运算可能会遇到问题。这种与生俱来的感数能力可以通过练习得到强化吗？答案是肯定的。你将在第四章中找到有关学习感数的建议。

> 创造和使用概念性感数模式有助于儿童掌握数数所需要的抽象数字和算术策略。

2. 数数

数数的起源

没有人知道人类最初是何时以及如何发展出超出“1、2和许多”这个先天序列之外的数数的想法的。也许他们开始也用今天的儿童所使用的方法：使用手指。（这个系统是非常可靠的，以至于现在许多成人还会使用手指进行计算。）我们采用的基于十进制的系统表明，数数开始于手指点数。拉丁文digit既有“数字”的意思，又有“手指”的意思。脑扫描的证据也进一步支持了这种数字与手指之间的联系。

人在进行基本算术的时候，最强的脑部活动位于左侧顶叶以及控制手指活动的运动皮层区域（Dehaene，Molko，Cohen & Wilson，2004）。图1.3呈现了大脑的四个主要脑叶和运动皮层。当人做算术时，虚线椭圆形内部区域被高度激活。该区域包括顶叶的一部分以及控制手指运动的运动皮层部分。

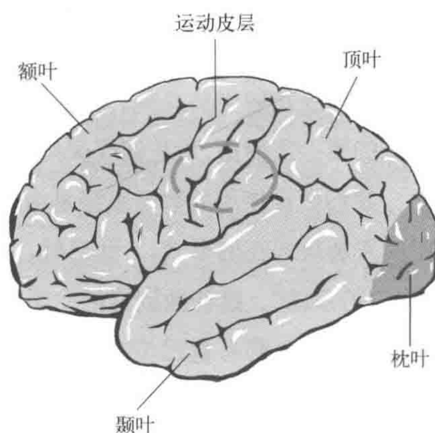


图1.3　脑示意图

图中显示了四个脑叶和运动皮层。椭圆形内区域在个体做算术时被高度激活。这个区域包括部分顶叶和控制手指的运动皮层部分。

这就提出了一个有趣的问题。我们用于数数的脑区包括了控制我们手指的脑区部分，难道这仅仅是巧合吗？是否可能是，数数开始于我们的手指，后来脑学

16

会了不用操作手指的数数呢？一些研究者推测可能人类的祖先最初关于数字的经验就是使用他们的手指，然后控制手指的脑区域就成了他们的后代脑中负责抽象心算的区域(Devlin，2000)。

假设手指是我们最早的数数工具，那么当我们数一堆超过 10 个的物体时显然就会遇到困难。因此，有些地区的文化通过使用身体的其他部位来增加总数。直到今天，位于新几内亚的托雷斯海峡群岛的当地居民还需要用身体的不同部位，包括用手指、手臂、肩部、胸部、腿和脚趾才能数到 33。他们通过命名身体部位来提取相对应的数字。因此，数字 6 被称为“手腕”，而数字 9 是用“左胸”表示。对于大于 33 的数字，他们使用木棍表示(Ifrah，1985)，但这种方法对于超过 30 的数字几乎是没有用的。所以，有些地区的文化使用实物标记系统，如在一块骨头或木棍上刻痕。现今已发现的刻痕骨头的历史可以追溯到 4 万年以前。根据考古记录，这个时间与人们开始在岩石刻画和洞穴绘画上使用符号表达的时间相近(Devlin，2000)。

手指数数和实物标记的使用表明这些文化理解了数量的概念，但并不能说明他们理解了数字的抽象概念。考古学家，如丹尼斯·施曼特·贝塞莱特(Denis Schmandt-Besserat，1985)怀疑，与作为标记的数字不同，抽象数字大约出现在公元前 8000 年，由更加进步的、位于新月沃土(Fertile Crescent，也就是现在的伊拉克和叙利亚地区)的昌盛的苏美尔(Sumerian)社会所使用。他们使用不同形状的符号来表示某个交易物品的具体数量，如一瓶油或一片面包，他们用泥板上的符号来记录不断变化的交易总额。当然，这还不是真正独立的数字系统，但这是对符号系统的第一次使用，为我们今天使用的功能性的抽象数字奠定了基础。

我们现在使用的数字系统是由印度人在 2 千多年前发明的，并且在大约 6 世纪时发展成现在的形式，7 世纪时，由波斯数学家介绍到欧洲并成为众所周知的“阿拉伯系统”。这种独创性的发明能在世界范围内被接受的原因如下：

17

- 每个数都有自己专属的词，数字词可以被大声读出来。说一个数字，如 1776(一千七百七十六)，便很清楚地展现了数字的个、十、百、千的结构。
- 数字系统不仅是符号的也是语言的，因此人们能够使用母语熟练地掌握数字。
- 数字简洁，容易学习。
- 我们可以用数字表示无限大的数量，并用来测量所有类型的集合。

- 用对符号的常规操作来代表数，这可以减少计算量。

公平地说，我应该提到，最初通过将基本的数字符号串在一起形成数字词用来表示数字的想法，来自大约公元前2千年的巴比伦人。但这个系统使用起来很不方便，因为它是基于六十进制的，因此没有被广泛接受。尽管如此，我们依然将其用在时间（60秒为1分钟，等等）和地理（60分为1个经纬度）的测量上。

开始数数

温（Wynn，1990）是最早钻研儿童是如何数数和为什么数数这两个概念的研究者之一。她发现，到30个月大的时候，大部分儿童已经在很多场合见过别人数数了。他们也展现出数出录像中不同种类声音数量的能力。因此，早在还没有正式学习的时候，他们就明白数数是一个抽象的过程，能够应用在各种视觉和听觉的客体上。

到了3岁，大多数儿童意识到可以用单独的词来描述物体的数量——也就是说，用它来回答“多少”的问题。儿童也知道数词与那些描述物体的大小、形状或者颜色的词不同，并且知道数词在描述物体时的特定位置。他们学着说“3只大狗”，而从不会说“大的3只狗”。在这个阶段，他们知道“3”是一个数字，但他们可能不知道它所代表的具体的值，这需要他们在将来的经验和练习中学到。

对于年幼者的大脑而言，数数是一种使用一对一原则的复杂过程。它包括按照正确的顺序说出数词，并将每个数词系统地分配给每一个被数的物体。最后，儿童意识到数数序列的最后一个数字就是这堆物体的总数，即所谓的基数原理概念。没有掌握基数原理的学生对加法和减法意义的理解将会延后。结果就是，这些学生在做加法的时候总是会每个数都数，他们能意识到加法是数字的增加，但不会从数到的最后一个数字开始加。在第四章，你将会看到一些关于如何帮助儿童学习数数的建议。

18

3. 语言如何影响数数

工作记忆容量的文化差异

每当有关数学的国际测验结果发表的时候，我们都会列出美国儿童与其他国家儿童的对比。与亚洲国家的儿童相比，美国儿童的成绩通常都相对逊色。这种差异部分归咎于不同的课堂教学和课程安排，但计算能力上的差异可能源

于不同文化用于表示数字的词不同。

大声朗读下面的数字串：7,5,9,11,8,3,7,2。然后遮住数字串，用20秒的时间努力记住这些数字。现在，不要看数字串尝试复述，所有的数字你都正确复述了吗？情况很可能是，如果你的母语为英语，你只能记住4个或5个按正确顺序排列的数字。但如果你的母语是汉语，你就能按正确顺序记住所有的数。这是为什么呢？当你通过大声朗读来试图记住一串数字时，你使用的是言语记忆回路，一种只能将信息保持两秒钟的瞬时记忆。这就迫使你不断背诵这些词，以便在记忆回路中不断刷新。因此，你的记忆广度就会受到你在两秒之内所能说出的数字词多少的限制。对多数人来说，要大声说出8个数字所包含的12个音节，这里所给的时间太短了。当然，如果你背诵得快，就能记住更多。

汉语数字则非常简短，大多数数字的汉语发音所占用的时间不到1/4秒，而相同数字的英语单词发音则需要大概1/3秒。这种差异对你而言微乎其微，但对研究者来说却非常大。对诸如英语、希伯来语、阿拉伯语、汉语以及威尔士语等多种语言的研究表明，用所使用不同的语言读出数字所需要的时间与朗读者的数字记忆广度之间存在显著的相关性。在香港，人们使用汉语中的广东方言，其记忆广度大约为10个数字，而讲英语和其他西方语言的人，其记忆广度只有7个数字。

19　脑成像研究发现了导致这种差异的一个因素，研究结果显示，母语为汉语的人进行数学运算的脑区与母语为英语的人所使用的脑区不同。研究者推测，这两种文化中数字的生物学编码可能存在不同，因为他们的书面语言是如此不同，从而导致视觉阅读经验的极大差异(Tang et al.，2006)。

> 7这个神奇的数字，长久以来被认为是工作记忆的固定广度，却只是西方成人的标准广度而已。看来工作记忆容量受到文化和后天训练的影响。

令人惊讶的是，7这个神奇的数字，长久以来被认为是工作记忆的固定广度，却只是西方成人的标准广度而已——也就是说，这只是90%的心理学研究所聚焦的西方人的标准。毫无疑问，工作记忆容量有着生理层面的局限，但这种局限似乎也会受到文化和后天训练的影响。工作记忆广度上的文化差异表明，亚洲的数字符号，如在汉语和日语中的表达，相比西方的数字符号来说更容易被记住，这是因为亚洲的数字符号更为简洁(Miller，Smith，Zhu & Zhang，1995)。

成人也会使用一些策略来增加数字记忆广度，这些策略也可以在适当的年

龄阶段教给小学生。

✓ 通过大声读或者使用最短的语言来记忆数字。数字 76 391 读作“7-6-3-9-1”(6 个音节[①])更容易被记住,而不是“七万六千三百九十一”(13 个音节)。

✓ 将数字组块成为一个组也是很有用的策略。如果把 10 位数字的电话号码分成 3 个数字一组的区号,然后是 3 个数字一组和 4 个一组的两组数字,就会很容易记住了。

✓ 找一些方法把你要记住的数字跟你所熟悉的其他数字相联系,如你所在地区的区号、邮政编码、地址或社会安全码。

英语单词使学习计算更困难

20

尽管十进制系统统领了大多数语言,但我们用不同语言说出的数字却呈现出从简单到复杂的各种形式。英语的数字词中有很多不一致的地方,10 有三种形式:ten,-teen,以及-ty。11 和 12 完全无规则可循,而从 13 到 19 则是其个位数位于十位数之前。汉语和日语则因为简单而受到好评,不仅是数字语法容易学习和记忆,而且语法完美地反映了十进制的结构。英语语法就做不到这点。因此,亚洲的学生学习数数比西方国家的同龄人更容易,数得更多,并能更快地学习简单的加法和减法。到 4 岁的时候,中国儿童已经能够数到 40,而同龄的美国儿童勉强才能数到 15,要想数到 40 还得再花费一年的时间。

> 由于语言的差异,亚洲学生学习数数比西方国家的同龄人更容易,数数也数得更多。

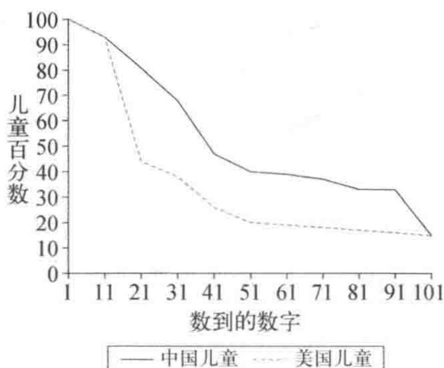


图 1.4 美国和中国儿童的数数能力

该图显示了能数到某个数字的中国儿童和美国儿童占被调查儿童总数的百分比。中国儿童比美国同龄儿童数得更多(改编自 Miller, Smith, Zhu & Zhang, 1995,已获得出版商和作者的许可)。

我们如何知道是语言导致了这种差异呢?因为两个国家的儿童在从 1 数到 12 的能力上没有表现出年龄差异(如图 1.4)。曲线表示的是能够正确数到某个数字的儿童占总的被调查人

---

① 这里和下一处的音节指的是英语发音的音节。——译者注

数的百分比。注意，过了12以后，数数曲线才开始出现明显的差异，这些差异只有当说英语的儿童遇到那些有特殊规则的数字词时才出现。

下面告诉你为什么。例如，在中国，数字1到9的简短名称分别是一、二、三、四、五、六、七、八、九。四个位数分别是10（十），100（百），1 000（千）和10 000（万）。超过10的数字组成也很简单：11就是十一，12就是十二，13就是十三，以此类推直到20，即二十。此后，这样的逻辑系统还在继续：21是二十一，22是二十二，30是三十，40是四十。对于超过12的数字，中国儿童只要继续沿用从1到12的数字组成规则即可（日语里有几乎同样的计数系统）。汉语只需要11个词就能从1数到100，而英语需要28个词。

美国的孩子通常试图运用有逻辑的数字规则，但他们发现，在正确背出了28和29之后，继续使用词语诸如"二十十"（twenty-ten）和"二十十一"（twenty-eleven）的时候就会犯错误。而这种数字中的语法错误在亚洲国家几乎是不存在的。

21 数字词的差异对亚洲和美国儿童在学校头几年的学习计算经验产生了影响。由于汉语口语的数字体系与书面的阿拉伯数字结构是直接对应的，因此中国儿童学习十进制的记数原理要比美国同龄儿童更容易。例如，当让儿童用表示1的木块和表示10的木条组成数字25时，中国儿童能马上选出2个表示10的木条和5个表示1的木块。而美国儿童会费力地逐一数出25个木块，且不能利用以10为一组的捷径。假如给他们一个表示20的木条，他们则会更多地用到它。这表明他们似乎注意到了25的数字意义，而中国儿童则对十进制结构有更为深刻的理解（Dehaene, 1997）。

我注意到，法语和德语也有自己的特性。例如，法语中的70读作soixante-dix（六十-十），97是令人费解的quatre-vingt-dix-sept（四-二十-十-七）。德语中的数字词中，十位数和个位数有着特殊的翻转，数字542读作funf hundert zwei und vierzig（五百-二-四十）。

总的来说，相比亚洲语言，西方表达数字的语言系统给儿童学习数数造成了更多的困难。西方的数字系统很难被保持在短时记忆中，这就使儿童学习数数和对十进制概念的理解变得更困难，从而使计算速度变慢。遗憾的是，没有人指望西方的计数系统会被修正为亚洲模型。但教育者至少应该意识到这些重要的语言问题，尤其是在对亚洲和英语国家小学生的数学测试结果进行

比较的时候。

4. 心理数轴

在过去大约40年间,很多实验者在让人们对数字进行比较时发现了一些有趣的现象。最早的实验是让成人判断两个阿拉伯数字哪个更大。当两个数字的值相差较大时,如2和9,成人反应快并且几乎不会出错。但当两个数字的值较接近时,如5和6,成人的反应时间明显增加,且错误率也急剧上升。并且,随着两个数字值的变大,对于相同数值差的反应会变慢。也就是说,比较3和4时会比比较2和3的反应时长,而比较8和9时,反应时会更长(Moyer & Landauer, 1967)。随后的实验也都获得了类似的结果(见图1.5)。

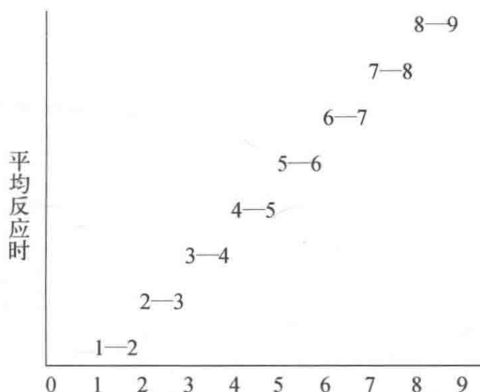


图 1.5　定性图

22

定性图说明,成人在判断两个数字在数字对中哪个更大时,平均反应时随数字值的增加而增加。

另一个实验测试了成人在判断一个两位数比65大还是小时所用的时间。实验再次发现,数字离65越近,反应时越长(如,71比65大还是小)。相反,随着数字与65的距离的增加,反应时逐渐缩短(如,43比65大还是小)(Dehaene, Dupoux & Mehler, 1990)。近年来,更多有关幼儿园(Temple & Posner, 1998)和二年级(Nuerk, Kaufmann, Zoppoth & Willmes, 2004)儿童以及成人(Brannon, 2003)对数量比较的反应时的研究中,也得到了类似的结果。

这些实验得出了两个结论:

- 我们比较两个数字大小的快慢不仅仅取决于数字之间的距离,也取决于它们的大小。判断9比8大比确定2比1大所花费的时间要长得多。因为对于数值差相同的数字,大数字比小数字更难作比较。
- 判断数值差小的两个数字比判断数值差大的两个数字所花费的时间更长。我们很容易辨别74比37大,而更难识别74比73大。

如何解释这些发现呢?研究者指出,人脑能理解每个数字并迅速将其转换

成一种内部数量，从而忽略表示数量的数字符号。人脑区分两个数字大小的难易程度并不依赖于绝对的数值距离，因为这些距离还与它们的数值大小相关。换句话说，人们似乎有一条心理数轴，我们想象数字是轴上的点，1 在左边，2 在 1 的右边，然后是 3，等等。当我们不得不判断两个数字哪个大时，我们就在心理数轴上想象它们，并判断哪个在右边。

心理数轴类似于我们在小学学习的标准数轴，但有一点很不相同。在我们的心理数轴上，数字不像标准数轴那样均匀分布。心理数轴延伸得越远，数字似乎靠得越近。这就解释了前面所描述的数量比较实验的结果。因为当数字值变大时，不断压缩紧凑的数字就会使得判断一对数字中哪个数字更大变得更困难。我们判断 6 和 5 哪个更大的速度，比判断出 65 和 64 哪个更大的速度要快得多。尽管两个数字对都只相差 1，但在我们的心理数轴上，较大的数字对之间似乎比小数字对之间靠得更近。这就导致了随着数字的变大，我们计算的速度和精确度会降低。图 1.6 解释了这个现象。（顺便提一句，针对那些母语从右往左读的人，如对阿拉伯人和希伯来人的实验发现，他们的心理数轴也是从右到左的。显然，我们的心理数轴与我们的阅读方向一致。）

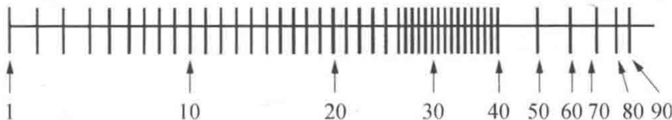


图 1.6 心理数轴

心理数轴表明为什么人脑判断 10 比 1 大比判断 80 比 70 大更快。

为什么这些发现如此重要呢？这说明心理数轴让我们形成了有限的数字直觉，并且它只针对正整数以及它们之间的数量关系（在我们的远古环境中没有负数）。这可能就解释了我们为什么没有对现代数学所使用的其他数字存在直觉反应，如对负整数、分数或无理数。这些数给以前的数学家提出了极大的挑战，如今仍然给学生造成了很大困难。这些数对一般人来说也是很难的，因为它们不属于人脑中的任何自然分类。小的正整数对我们内部的数感具有重要意义，甚至 4 岁的儿童也能理解它

> 随着数值的增大，数轴上的数字不断压缩，使得我们对数字对中哪个数字更大的判断变得更困难。因此，随着数字的变大，我们计算的速度和精确度会降低。

们。但是其他的数字就没有这种自然的联结。为了理解它们，我们不得不构建有助于理解的心理模型。教师在讨论这些主题的时候会做到这一点。例如，在介绍负数的时候，教师会借助隐喻，如从银行借钱，零度以下的温度，或者把数轴延伸到零的左侧。

数字符号不同于数词

关于数字符号和数词的一个奇妙的发现是，它们所使用的大脑加工位置不同。脑成像实验和临床个案研究证实，数字符号预置在位于大脑左侧顶叶的数字模块中，而普通的语言数词则保存在位于左侧额叶的布洛卡区（见图 1.7）。布洛卡区是大脑的语言词汇加工区域。

24

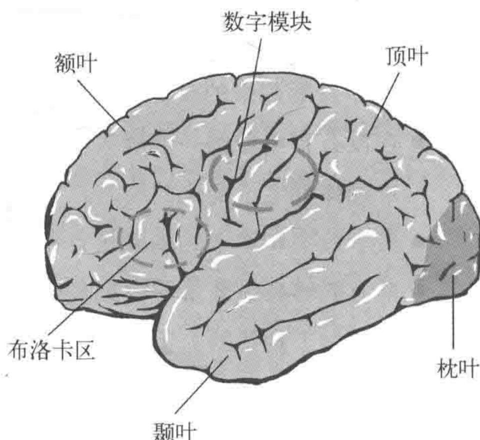


图 1.7 布洛卡区示意图

位于左侧额叶的布洛卡区加工我们的语言词汇，包括数词。但数字符号预置于大脑左侧顶叶的数字模块中。

临床研究描述了那些因布洛卡区损伤而不能读词的人却能大声读出用数字形式呈现的单个或多位数字。其他语言能力严重受损的患者几乎不能读写，但如果问题以纯数字形式呈现，他们就能很好地完成数学标准测验（Butterworth，1999）。

我们的数字系统可能确实是一种语言，但它又非常独特，由不同于日常语言的脑区负责。德夫林（Devlin，2000）指出，如果数字符号源于手指的运用（顶叶加工过程），而数词来自一般语言加工（额叶加工过程），那么我们就不难预测数字符号相对于数词而独立存在。

这里我想重点提示的是，人脑是将数字作为一个数量而非作为词汇来理解的。数字符号几乎能非常自然地、无意识地立即转换为内部数量，而且，这种转换包括数字在心理数轴中自动按方向排列，小数字在左边，大数字在右边。那么，理解数字就是深深根植于大脑中的反射性行为，从而我们能迅速赋予数字以意义。

> 人类大脑将数字作为一个数量而非词汇来理解。这种反射性行为深深根植于大脑中，因而我们能迅速赋予数字以意义。

5. 数感的外延概念

数学教育者对数感有比认知神经科学家更广泛的理解。我们已经提到，认知神经科学家认为，数感是一种对数量有生理基础的先天感觉，局限在对数量的简单直觉中，包括对小数量快速精确的感知（感数）、数数能力、数量比较能力和理解简单的数学运算的能力。迪昂（Dehaene，2001）是单一数感的主要提议者，单一数感是指数量的基本表征，而非表征和能力的结合体。然而，他也提出，在认知发展和教育的共同作用下，这种核心的数感和其他认知系统已建立了联系。

25

贝尔奇（Berch，2005）回顾了认知发展、数学认知和数学教育的文献，发现数学教育者认为数感本质上更复杂更多元化。他们将这个概念扩展到包括在数学学习活动中发展起来的技能。根据贝尔奇的观点，这些能力包括：

- 在没有直接看到一个物体从一小堆物体中拿出或加入时，能够意识到这堆物体发生了变化的能力；
- 关于数字和算术的基本能力和直觉；
- 具有能够操纵数量的模拟表征的心理数轴；
- 粗略加工数量的先天能力；
- 进行数量比较的能力；
- 自然拆分数字的能力；
- 使用策略解决复杂问题的能力；
- 运用数学运算之间的联系理解十进制数字系统的能力；
- 使用数字和定量方法交流、加工和解释信息的能力；
- 判断计算合理性的精确度和灵敏度的意识；
- 通过寻找新信息与先前掌握知识之间的联系获得数字相关意义的意愿；
- 关于数字运算作用的知识；
- 运用数字的流畅性和灵活性，以及对数字意义的理解能力；
- 识别重大数量错误的能力；
- 理解数字是现实世界中测量物体的工具；
- 发明计算的步骤；
- 不用任何精确的计算，以一种合理的方式思考或讨论数字问题或表达式的一般能力。

关于更为宽泛的数感概念的部分观点见于以下文本中： 26

- 美国国家数学教师委员会的五个内容标准之一——《学校数学教学原则与标准》(NCTM，2000)；
- 当代数学课本；
- 美国国家教育进展评估(NAEP)、国际数学和科学研究的发展趋势的数学部分(TIMSS)、国际学生评价项目(PISA)的单独的数学测试题集。

6. 数感能教吗

把数感作为内在固有能力的人认为，这种能力是由遗传决定的，具有长期的进化历史。它不需要外在指导，并随着年轻人与环境的交互作用自然地发展起来。然而，大多数研究者并不赞成数感是一种固定的或不变的能力。相反，他们认为，处理基本数量能力的认知神经系统仅仅为获得数学教育者所说的扩展能力提供了基础。并且，他们意识到，在进入学校之前，那些正式和非正式的教学都能提高数感。

贝尔奇(Berch，2005)指出，数感的延伸概念所涉及的能力和技能不可能在课本中被割裂成单独的章节或教学单元，它们也并不会在那些为此目的而特别设计的系列活动中得到发展。他同意那些数学教育者所主张的数感应该是一种渗透于数学教学和学习各方面思维方式的观点，把数感当作一种学习的副产品而不是直接教学的特定目标的观点可能更有益。

格斯滕和查德(Gersten & Chard，1999)指出，数感的先天特质可能与阅读中的语音意识类似，尤其是在早期的算术体验中。正如语音意识是学习语音和成为一个阅读者的先决条件一样，培养数感是学习数学的先决条件。他们进一步指出，数感是早期学习算术时容易忽略的部分，并解释了为什么死记硬背的机械训练和练习不能显著提高数学能力。 27

> 正如语音意识是学习语音和成为一个成功阅读者的先决条件一样，培养数感是成功学习数学的先决条件。

格斯滕和查德(Gersten & Chard，1999)认为，数感对学习数学至关重要，因此他们设立了五个等级，让教师能够评估孩子的数感。这五个**等级**是：

- **等级 1**　儿童尚未发展出超出他们天生数量概念的数感。他们不理解相对数量，不知道“少于”和“多于”或“较少”和“较多”等概念。
- **等级 2**　儿童开始获得数感。他们能理解“很多”“六”和“九”等术语，并开

始理解"少于"和"多于"的概念。他们也能理解较少的数量或较多的数量，但还没有基本的计算技能。

- **等级 3** 儿童能充分地理解"少于"和"多于"的概念。他们有了计算的概念，并可以使用手指或物体运用"从 1 开始数"的策略来解决问题。但当他们计算大于 5 的数字时就会出错，因为这需要使用两个手的手指。
- **等级 4** 儿童可以使用"加起来"和"求总和"的过程代替在前一个等级上所用的"数出全部"的过程。他们理解了数字概念的实质，明白了并不一定要数到 5 才能知道那 5 个东西的存在。如果他们能准确地数数，那么在这个等级的儿童就能解决任何数字问题。
- **等级 5** 儿童显示出用提取策略解决问题的能力。他们已经能进行加法并开始获得简单的减法能力。

给不同年级的学生教授数感

古尔甘尼斯(Gurganus，2004)同意数感类似于语音意识的观点。但她提出了更广泛的观点，并指出，与语音意识不同的是，数感是通过学生的数学教育发展而来的，并能应用于范围更广的概念。以下是她为教师提出的帮助不同年级的学生增强数感的方法。

✓ **把数字与有意义的物体配对**。为了帮助小学生把数字作为一个值而不是标签来学习，可以将数字与具体的物体相联系。例如，自行车有 2 个轮子，三轮车有 3 个轮子，小轿车有 4 个轮子。

✓ **使用语言逐步地将数字与物体和符号匹配**。给学生示范如何使用对话来创造有关数字的句子，以使学生能通过自我对话的方式描述这些关系。例如，"2 块积木和 3 块积木加起来是 5 块积木"。

28

✓ **合作数数活动**。要求年幼的学生数出 10 以后的数字并倒数回来。让年龄大一些的学生在 2 秒、5 秒、10 秒甚至在 3 秒、4 秒或 7 秒内努力完成。正数和倒数可以帮助学生理解数字关系和数量。让学生互相猜测数数方式，如，"500，525，550，575——我的数数方式是什么？"

✓ **提供数轴经验**。使用彩色的带子在教室地板上做一条大的数轴(见图 1.8)。让学生从这个数字到那个数字之间慢慢移动来展示数数、运算甚至凑整的过程。可分别使用数字、整数或小数画数轴。

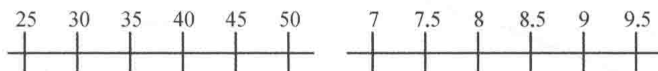


图 1.8　提供数轴经验

在教室地板上放置不同的数轴，帮助学生理解数字之间的关系。

√ **策划有意义的估计体验**。学生需要意识到许多事情不能或者不需要精确测量。为学生提供大量估计的练习，强调估计不是猜测，而应该是根据经验在一个合理的范围内估计。例如，“你认为今天食堂里有多少学生吃饭？”

√ **测量，然后进行测量估计**。让学生使用测量工具测量环境中有意义物体的长度、面积、容积、质量、温度或其他属性。年幼的学生可以从测量教师的桌子或者教室地板的距离开始。进行一些练习后，要求学生在测量之前进行估计，这样可以使学生对测量单位及其意义有更为深刻的感受。

√ **使用数字图表**。不同数字排列（如 1 到 100）的图能为学生提供很多深入探讨数字类型的机会。遮住图表中的特定数字，让学生来发现复杂概念之间的内在联系，如因数和质数的概念。

√ **引入有关数字或数字表征的材料**。让学生观察如骰子、多米诺骨牌、扑克、硬币、钟和尺子等物品。让他们寻找将这些物品用于数数、组合模式、数字运算和数字比较等的方法。

29

√ **阅读有关数字的书籍**。阅读像由詹姆斯 · 史蒂文森（James Stevenson）（1994）编写的《泥地奥运会》（*The Mud Flat Olympics*），或由安诺 · 米苏玛莎（Anno Misumasa）（1977）编写的《阿诺数数》（*Anno's Counting Book*），给学生提供在数学海洋中航行的不同路线。

√ **创制数字魔方**。向学生演示如何确定缺失的数字，并让他们创制新的魔方来挑战他们的同学（如图 1.9 所示）。

	2	3	13
5		10	
	7		12
4			

1			
	6		9
8		11	
	3	2	16

图 1.9　数字魔方

数字魔方有许多不同的构型并且是一种学习加法的有趣方式。在这些例子中，行、列和对角线相加都等于 34。

√ **对同一数量运用多种不同表征**。给学生示范如何在小数、分数和百分数之间来回变换(如,0.25 = 1/4 = 25%)。指出如何用毫米、分米和米表示同一长度(如,35 mm = 3.5 cm = 0.035 m)。

√ **探究大数字和它们的表征**。学生喜欢大数字,像 10 亿和兆,但常常很难对它们有概念。使用计算器探讨平方和其他指数的结果。在合适的时候,使用科学计数法来表示大数字(如,500 000 可以写作 5×10^5)。

√ **收集数据并制表**。每个年级的学生都能收集有意义的数据,让学生尽可能地使用实物。如在各种豆子的混合物中数出每种类型的豆子的数量,或者在一堆弹珠中数出每种颜色的弹珠的数量。同时,要求学生使用图、公式和其他对照方式来检查数据。

√ **比较其他文化中的数字表征**。学生可以通过探讨在其他文化中如何数数,使用符号表示数字和解决运算法则等问题,来洞察数字之间的联系。学生通常会发现这些活动非常有趣,他们可以阅读有关数数手势和不同文化中用以表征数的各种符号和体系(Zaslavsky, 2001)。

30

√ **建立电子数据表**。商务电子数据表是一种教授学生如何对每个单元格进行公式编码的好方法,它能计算并与其他单元格内的值进行比较。学生可以问自己"如果……那么……"的问题,并在电子表格中计算值。

√ **解决问题并考虑结果的合理性**。提醒学生在问题解决的最后一步应该问:"这个答案合理吗?"让他们练习通过估计而不是真正计算来确定答案。

√ **发现数字的日常用途和功能性用途**。为学生创造每个可能的机会接触数字在实际中的运用。例如,他们可以注意自己喜欢的运动队的平均人数,在股票市场上追踪一家公司,查询百货公司的销售额,或者判断学校实地考察的路线图上的距离。只要有可能,就让学生列图表、比较、预测和讨论他们所发现的数据和测量结果。

√ **探讨罕见数字**。年龄大一点的学生可能会在特殊数字模式中找到探险的感觉。例如斐波纳契数列和黄金比例,过剩数、完数和怪异的数字,构成回文结构的数字模式。

√ **示范对于数字和数字模式的喜爱**。研究不断表明,教师是建立学生对数学的好奇和喜爱氛围的关键因素,要引导学生不断学习和寻找新的方法,使跟数字打交道变得更有乐趣。互联网是数字游戏的宝贵来源,参见本书的资

源部分。给低年级学生教授数感的更多建议将在第五章详细介绍。

7. 从数量、数字词到符号

为了说明数感是如何产生的，研究者莎朗·格里芬(Sharon Griffin，2002)创建了一个模型，该模型显示，数感的发展主要有三个阶段。第一阶段，使用视觉加工系统识别集合中的物体。对于小的集合，我们不需数数就能够通过天生的数感快速判断数量的多少。随着集合中物体数量的增加，我们就会进入到第二阶段，即创建数字词，以便使用母语与其他人就精确的计数进行交流。第三阶段发生在当我们意识到书写大数量的数字词很无趣，而且它们并不适合用于数学操作时，于是我们创造了数字符号和运算符号。刚开始，从一个阶段到下一阶段是线性的，但通过练习，这三个阶段在大脑执行数学运算时会相互作用(见图 1.10)。

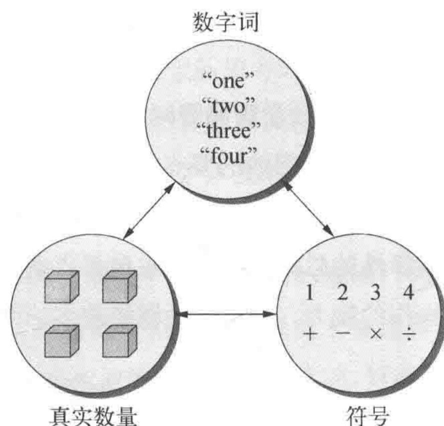


图 1.10 数量、数字词和符号

研究者格里芬创建了一个模型，该模型展示了从认识真实世界的数量到创造数字词来形容这些数量，到最后使用数字符号和运算符号来表征和操作数量的数感的发展过程。通过练习，这三个阶段在大脑执行数学运算时会相互作用。(获准改编自 Griffin，2002)

8. 加德纳的逻辑/数学智能

很多读者可能熟悉 1983 年哈佛大学霍华德·加德纳(Howard Gardner)提出的理论，即人类生而具有各种能力，这些能力是人在所处环境中得以成功的基础。他的观点——作为多元智能理论被人们所熟知——是，我们拥有至少 7 种(现在上升到 10 种)不同的智能。他最早提出的 7 种智能是音乐智能、逻辑/数学智能、空间智能、身体/运动知觉智能、言语智能、人际交往智能，以及自省智能。不久之后，他增加了自然探索智能，几年之后又增加了灵性智能和情感智能。加德纳把智能定义为个体使用所学技能制造产品或使用被社会认可的方法解决问题的能力。这种新颖的方式将我们对智能的理解扩展到发散思维和人际关系中。他进一步区分了智能和创造力的定义，指出人们在日常生活中可以在

任何智能中显示出智力原创性(Gardner，1993)。

这个理论提出，每种智能的核心是该智能独有的信息加工系统，体育家的智能不同于音乐家和物理学家的智能。加德纳还认为，每种智能都是一个连续统一体，并且是半自主的。一个有运动能力但没有音乐天赋的人已经提升了他的运动智能，但音乐能力的拥有或缺失独立于个体的运动才能。

32

逻辑/数学智能等同于数感吗

根据加德纳的观点，逻辑/数学智能使用数字、先后顺序以及特定模式来解决问题(见图 1.11)。因此，它包含了逻辑的、系统的、归纳性的以及某种程度上演绎性的思维能力。它也包括辨别几何和数字模式，以及运用抽象概念观察和操作的能力。拥有这种智能较多的学生有如下表现：

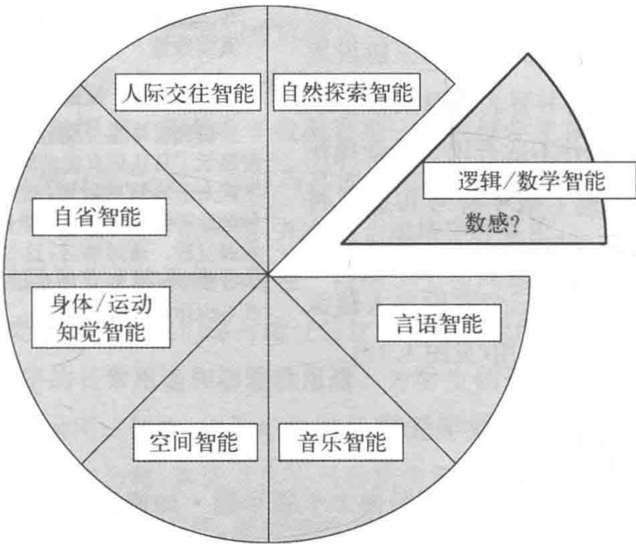


图 1.11　加德纳提出的 8 种智能

此图显示了加德纳提出的 10 种智能中的 8 种。逻辑/数学智能是否可能就是数感呢?

- 能轻松对数字进行心算；
- 组织性强；
- 非常精确；
- 有系统解决问题的方法；

- 容易识别数字和几何模式；
- 喜欢计算机游戏和拼图；
- 喜欢用逻辑的方法探索和实验；
- 能够轻松从具体转到抽象；
- 擅长概念化的思考。

加德纳明确指出，智能不仅是指一个人如何思考，也包括思考时所处情境的组成和作用，因此，特定文化的组成和价值观将影响特定智能如何被激发、培养或抑制。一个人的综合智能是先天的倾向（遗传贡献）和个体发展所处社会（环境贡献）共同作用的结果。

有提高数学能力的基因吗？很可能有。同卵双生子（分享相同的基因）和异卵双生子（分享一半的基因）的研究表明了某种特征可以在多大程度上被遗传。过去十年间的多项研究发现，同卵双生子表现出相似的数学成绩。然而，异卵双生子则可能一个数学成绩很优秀，而另一个很平庸（Alarcón，Knopik & DeFries，2000）。

33

因此，数感虽然被认为是数学智能的先天起源，但数感能在何种程度上成为个体的主要才能，仍然取决于遗传输入的类型、强度以及个人成长与学习所处的环境。

我们将在第三章和第七章更详细地讨论加德纳的理论及其在课堂教学中的应用。

三、下章预告

数感给学生提供了有限的感知和判断小组物体数量的能力。随着物体数量的增加，大脑必须诉诸一个更精确的系统，我们称之为数数。同时，精确的加减法所必需的技能也产生了。但是，对学生来说，需要掌握更多更大的数字，因此加法不再是一个有效的加工过程，现在他们必须学习通过乘法进行计算。为什么学习乘法甚至对成人来说都这么困难呢？我们能够使用更有效的方法来教授乘法吗？我们真的需要学习乘法表吗？关于如何学习计算以及其他有趣问题的答案，将在下一章阐述。

34 ## 四、本章反思



在此页简略记下要点、想法、策略和资源，以备日后思考。此页是你的个人日志小结，它能帮助你日后回忆。



第二章　学习计算

数学并不仅仅拥有事实，它还拥有一种美——一种冷峻的美，像那些雕塑一样。

——伯特兰·罗素（Bertrand Russell）

数数对于孩子来说是一种自然习得的能力。他们可能是自发习得的，也可能是模仿同伴的，他们最开始就是用数数的方式来解决计算问题，可能使用数词，也可能不用。当孩子们开始把两堆物体用手指头数着加起来时，他们就迈出了远足计算旅途的第一步。慢慢地，他们学会不用数手指头做加法，再然后，到 5 岁之前，他们表现出掌握了加法交换律的能力（知道 a + b 等于 b + a）。但是，当计算越来越难的时候，错误就开始出现，甚至成人也是如此。有一件事是肯定的：人脑在应付计算方面存在严重问题。

在人类的脑的进化史中，没有什么是为能够记住几十个乘法口诀和两位数减法所需要的多步运算而准备的。我们对于粗略数量的感知能力可能存在于我们的基因中，但是，处理精确的数字符号的计算是一种考验，可能令我们错漏百出。

我们对于粗略数量的感知能力可能存在于我们的基因中，但是，处理精确的数字符号的计算是一种考验，可能令我们错漏百出。

一、概念结构的发展

有关数字的概念结构的发展很早就开始了，这使得儿童在学前就能体验计算过程。他们能迅速掌握很多加法和减法策略，并仔细选取合适的策略解题。当运用这些算法时，他们会在心里估计需要多长时间完成计算以及结果正确的可能性有多大。西格勒（Siegler，1989）对儿童使用策略的情况进行了研究，他认为，儿童对于每个算法的正确率进行了统计，渐渐地，他们会修正自己的策略集，保留那些对于每一道题最合适的策略。

举一个简单的例子，当问一个9岁的小男孩"9减3等于几"时，你可能会听到他说："九……八是一……七是二……六是三……六！"这是他从大的数开始往回倒数。现在再让他算9减6，这时他用解决前面那道题的倒数策略的可能性很小，他会发现一种更有效的方法。这次，他会按从小数到大数的步骤数："六……七是一……八是二……九是三……三！"但儿童是怎么知道这样算的呢？通过练习，孩子会发现，当减数跟被减数的值相差不是很近时，从大数开始倒数会更有效。相反，如果减数跟被减数的值很接近，那从小数开始数会更快。通过发现并运用这个策略，儿童还会认识到，计算9减3和计算9减6所用的步骤数是一样的，都是三步。

这个时期让儿童在家里接触有关计算的活动非常重要，这能让他们接触新的算法，给他们提供不同的规则，以使他们能够选择最好的策略。无论哪种方式，对大多数儿童来说，为基础计算形成、提炼和选择算法规则的动态过程在他们上幼儿园之前就已经完成了。

> 对于大多数儿童来说，为基础计算形成、提炼和选择算法规则的动态过程在他们上幼儿园之前就已经完成了。

人们尚未完全了解儿童大脑中的数字结构究竟是如何发展起来的。然而近年来，认知神经科学的研究提供了很多关于大脑发育的线索，足以使研究者为早期数字结构在大脑中的进化制定出一条时间线。莎朗·格里芬和她的同事们（Griffin，2002）回顾了相关研究，并开发了针对大量3～11岁儿童有关数字、时间单位和钞票面额知识的测试。他们根据学生们在这些测试中的成绩，对这个年龄段有关数字概念结构的发展进行了概括。他们的研究集中在概念体系是如

37

何发展的核心假设上。以下是三个特定的假设：

(1) 孩子思维中的主体意识发生在 5 岁左右，此时，早期建立的认知结构被整合成层次结构体系。

(2) 在这一发展阶段，大约每两年发生一次认知结构的重要变化。在这一模型中是 4 岁、6 岁、8 岁和 10 岁，因为这几个年龄代表了各发展阶段(即 3～5 岁，5～7 岁，7～9 岁，9～11 岁)的中间点。

(3) 这种发展进度大约可以代表现代文化中 60%儿童的典型发展水平。因此，大约有 20%的儿童将以更快的速度发展，而另 20%的儿童则发展较慢。

1. 4 岁儿童的概念结构

幼儿天生的感数能力和运用手指进行简单数数的能力使他们在 4 岁前就能发展出两种概念结构。一种是对整体数量的区分能力，一种是对物体的初始数数能力(见图 2.1)。为了获得整体数量，他们能够区分两堆薯条哪堆多哪堆少，两个时间单位哪个短哪个长，两张钞票哪张钱多哪张钱少；面对一个天平，他们能区分哪边重哪边轻，并且知道哪边的臂会往下落。这个年龄段的孩子更多地依靠感数而不是数数，但他们知道，如果把一个或几个物体加到一堆物体里，数目会变多，而拿走一个或几个会让数目变少。 38

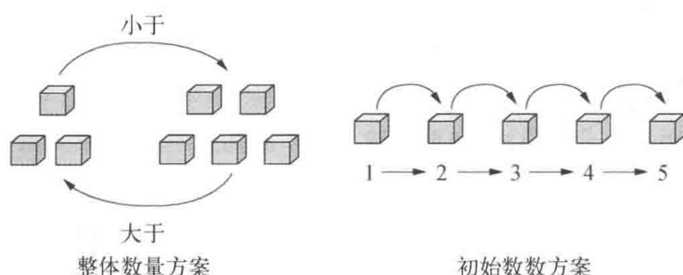


图 2.1　4 岁儿童的概念结构

4 岁时，儿童形成了两种主要结构：一是靠感数建立的整体数量，一是通过手指一对一点数形成的对少量物体的计数。(获准改编自 Griffin，2012)

在这个阶段，儿童的数数能力也在发展。他们知道每个数字按固定的顺序出现，并且一个数字只对应一堆物体里的一件物品。他们还知道，数数的最后一个数表示这堆物体的多少。大多数孩子能数到 5，有些能数到 10。然而，尽管具备了数数的能力，但这些孩子在判断数量大小时仍然更依赖感数。这或许是因

为整体数量结构跟数数结构存储于大脑的位置不同，也可能因为这两个区域之间还没有牢固的神经连接。

2. 6岁儿童的概念结构

6岁左右的儿童已经将他们的整体数量和初始计数模型整合进一个更大的结构中，这就是我们在第一章提到的心理数轴。由于它赋予了孩子掌握真实世界中数量意义的工具，因此被认为是整数的核心概念结构。通过运用这种更高级的结构，儿童认识到，他们按顺序数到后面的数所表示的数量比前面的数大（见图2.2），并且认识到数字本身就具有数量意义，即7比5大。数轴还让孩子们不需要真实的物体，仅仅依靠在数轴线上往前或往后数就能完成简单的加法和减法运算。这一发展阶段是一个重要的转折点，因为儿童开始了解，数学并不仅仅发生在外部世界，它还存在于自己的脑海中。

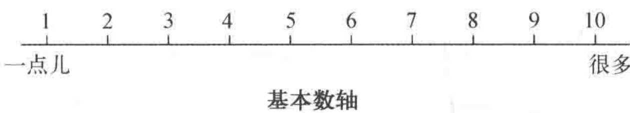


图2.2 6岁儿童的概念结构

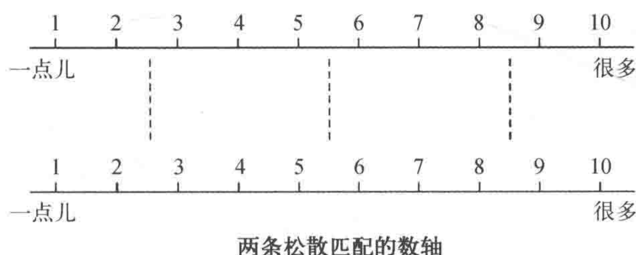
6岁时，儿童发展出了心理数轴的概念，这赋予他们关于整数的核心概念结构。（获准改编自 Griffin，2002）

现在，儿童开始在新情境下使用数数技能。他们意识到，数数能够帮助他们辨认时间，帮助他们判断两张形状大小一样的账单，哪张的数额更大，并且知道虽然一角硬币比五分硬币小，却更值钱。与4岁儿童不同，6岁儿童在判断物体数目时更依赖于数数策略而不是整体数量。例如，判断一堆薯条的数量和秤上砝码的重量等。

3. 8岁儿童的概念结构

39

8岁儿童已经开始将他们的复杂概念结构分解到双重心理数轴图式上，这样他们能以松散匹配的模式表达两个数量。现在他们理解了位数的概念，能够心算两位数的加法并且能够判断两位数的大小。双重数轴结构让儿童能够识别时针和分针；能够解决包含两种钱币单位的金钱问题，比如元和分；能够解决需要同时计算砝码数和砝码距支点距离的秤杆问题。



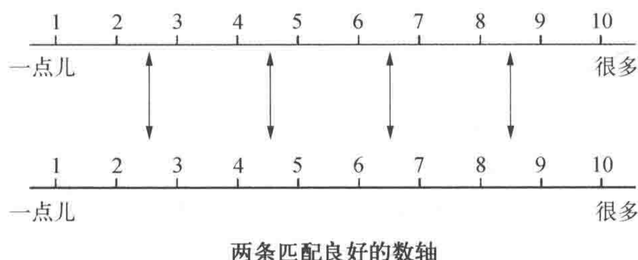
两条松散匹配的数轴

图 2.3　8 岁儿童的概念结构

到 8 岁时，儿童已经能在松散匹配的两条数轴上操作数字。
（获准改编自 Griffin，2002）

4. 10 岁儿童的概念结构

10 岁的时候，儿童已经能够扩展他们的双重数轴结构来处理两个数量，甚至包括第三个数量变量的问题。他们现在对整数系统有了更深入的了解，能够进行包含进退位的两位数的心算，甚至解决涉及三位数的问题。实际上，他们能够增补其中一个数量变量，以便使其他变量发生变化。这种新的结构使他们能够将小时转化为分钟，从而判断两个时间单位，比如说 3 小时与 150 分钟哪个更长。他们发现，把一种钱币单位转化为另一种单位会更容易解决诸如谁的钱更多的问题（比如说把 0.25 元转化为角和分），也更容易解决砝码数和砝码到支点的距离同时变化的秤杆问题。



两条匹配良好的数轴

图 2.4　10 岁儿童的概念结构

10 岁时，儿童能够在两条匹配良好的心理数轴上操作数字，因此能进行多位数的心算。（获准改编自 Griffin，2002）

二、解决乘法问题

40

到目前为止，我们已经揭示了儿童是如何使用简单的加法和减法来操作数

字的。在学校，他们最终要遇到一种叫乘法的运算，有时教师称之为连续加法。然而乘法运算所需的心理活动更多，并且与加法和减法用到的一些天生数感的过程有所不同。脑成像研究显示，乘法运算所涉及的神经网络要比加法和减法多(Ischebeck et al.，2006)。这没什么可奇怪的，因为会加法和减法已足以让我们的祖先生存下去。因此，人类需要发明出能够攻克乘法的学习手段。

1. 为什么乘法表难学

还记得你是小学生的时候第一次碰到乘法表的情形吗？你记忆乘法表的时候觉得容易还是难？今天你对它了解多少？哪怕经过数年的练习，大多数人还是会在背乘法表时遇到困难。正常智力水平的成人在计算乘法时大概会有10%的错误率，甚至在计算一位数的乘法，比如 8×7 和 9×7 时，也会花长达两秒的时间，并且有 25%的错误率(Devlin，2000)。为什么我们会觉得这么难？造成这种数字操作困难的因素有好几个，包括联结记忆、模式识别和语言，但奇怪的是，这是人类大脑最强的和最有用的三种能力。

2. 乘法与记忆

直到 20 世纪 70 年代末，心理学家们还是认为，简单的加法和乘法主要是依靠工作记忆中的数数来完成的。1978 年，阿什克拉夫特(Ashcraft，1995)和他的同事开始了一系列的研究，在年轻人群中检验这个观点。他发现，大多数人将两个数相加或相乘所用的时间是一样的。而当计算的数字变大时，尽管加法和乘法所用的时间一样，但是计算所用的时间会变长。例如，计算 2+3 或者 2×3 需要的时间不超过 1 秒，但是计算 8+7 或者 8×7 则需要 1.3 秒。如果乘法是在工作记忆中被加工的，那么因为将两个数字相乘需要数更多的数，不是会比将他们相加所用的时间更长么？在经过多次实验后，阿什克拉夫特提出了唯一符合实验结果的合理解释：计算答案是从存储在长时记忆中的乘法表中提取的，我们的工作记忆中并没有发生数数或加工过程。

41

得出这个结果不足为奇，理由有三：首先，第一章已经提到，我们对数量的心理表征的准确度随着数值增大而迅速下降。其次，受学习运算技能时的学习顺序影响，我们总是倾向于记住学习情景中最先出现的内容。我们开始学习计算时，是从小数字的简单问题开始的，而包含大数字的复杂问题是随后才学的。

第三，由于小数字在问题中出现的频率比大数字更高，因此我们对于包含大数字的乘法问题的练习可能就少了。

现在，你可能会说："是的，但那又怎样！我们是在用低年级记住的那些知识来解决现在的计算问题，难道这不正常吗？"这可能是正常的，却不是天生的能力。学前儿童用他们天生但有限的数量概念，发展出依靠直觉数数的策略，来帮助他们理解和估计大数量，但是他们没有能够继续沿着这条依靠直觉的路走下去。当这些孩子进入小学时，他们遇到了一个突然的转变，需要从对于数量和数数策略的直觉理解突然转到对计算的机械学习上。转瞬之间，计算的过程意味着学习大量有意义或无意义的数字知识，并将这个数据库储存在记忆中。他们还发现，他们在平时对话中所使用的一些词在计算时所表示的是不同的意思。尽管遇到困难，但许多孩子在这场心算和语言体系的剧变中都坚持了下来。令人遗憾的是，大多数孩子在这个过程中失去了他们对计算的直觉。

进入小学的孩子遇到了一个突然的转变，需要从对于数量和数数策略的直觉理解突然转到对计算的机械学习上。不幸的是，大多数孩子在这个过程中失去了他们对于计算的直觉。

3. 我们教授乘法表的方法符合直觉吗

并不尽然。经过数小时的练习，儿童花费了巨量的脑细胞辛苦地记忆乘法表，得到的反而是更高的错误率和挫败感。与此同时，他们每天却能够轻而易举地学会 10 个新单词的发音、意义和拼写。他们显然不用一遍又一遍地像背诵乘法表那样去学习这些单词。并且，孩子们还能够毫不费力地记住朋友的名字、地址、电话号码和书名。显然，他们的记忆是没有问题的，但就是记不住乘法表。为什么记住乘法表对儿童甚至成人来说都那么困难？

一个答案是，我们最常用的教授乘法表的方法是与人的直觉相违背的。通常我们是从乘 1 的表开始，一直背到乘 10 的表。这样一步一步教的结果就是产生了 100 个（10×10）分离的需要记忆的算式。但是，这真的是教授乘法的最好办法吗？儿童在记忆乘 1 和乘 10 的乘法表时基本没有困难，因为这些乘法是与他们的数字直觉体系和利用 10 个手指的策略相吻合的。那现在就剩下 64 个各自独立的算式（2、3、4、5、6、7、8、9 分别乘以 2、3、4、5、6、7、8、9）。但是为什么要

记所有64个式子呢？我们已经在本章开头提到，儿童在5岁时就已经能够认识到加法交换率了。只要给他们展示乘法交换率(3×8等于8×3)，就能把分离的64个算式减少近一半，减到36个(有四对由相同数组成的算式没法减掉，如2×2或5×5)。这个表由此会容易得多，但是仍然没有解决根本问题。

有些人批评说是学生没有足够努力地去记这些乘法算式，也有人怀疑，在计算器普及的今天，这些努力是否必要。然而，这些观点都没能回答这样一个问题：为什么我们的记忆在这个任务面前会遇到这样的困难？在这里，我们将学习有关记忆的特性与乘法表结构的问题。

模式与联结

人脑是一个五星级的模式识别器。人类的记忆通常通过联结来提取，即通过一个念头追溯存储在长时记忆中的另一个念头。一个人提到母亲，在你大脑颞叶的联合皮层就产生了心理图像，长时储存区被激活，然后你回忆起了母亲第一次带你去动物园的情景，大脑的边缘系统唤起了你回忆中的情感。你那时是多么激动，因为你从来不知道原来大象是这么大，长颈鹿是这么高。越来越多的连接开始出现，你充满感情地回忆起孩童时期第一次去动物园时的那种激动。大脑这种探测到模式并形成联结的能力是它最强大的功能之一，通常被称为联结记忆。实际上，人们不需要看见脸就可以认出某人。凭借联结记忆，人们通过走路、姿势、声音和身体轮廓就可以快速准确地辨认出远处的熟人。

> 联结记忆是一种有力且有用的能力。但不幸的是，联结记忆在碰到像记忆乘法表这样的任务时就出现了问题。在这里，各个不同的信息片段之间需要保持互不干扰。

43

联结记忆是一个强有力的工具，它让我们可以在碎片化的数据之间建立联结，让我们能够利用类比推理，将一个情境中学到的知识用到新的环境中。但不幸的是，联结记忆在碰到记忆乘法表这样的任务时就出现了问题。在这里，各个不同的信息片段之间需要保持互不干扰。

德夫林(Devlin，2000)指出，当面对记忆乘法表这样的任务时，联结记忆会出问题。这是因为我们通过语言记忆乘法表会导致不同输入之间的互相干扰。计算机能够区分6×9＝54，7×8＝56和8×8＝64是相互独立且不同的实体。

然而，在人们大声读出这些式子时，大脑卓越的模式搜索能力却检测出它们之间韵律的相似性，因而难以对这些表达式加以区分。因此，6×9 的模式可能会激活其他一系列的模式，包括 45、54、56 和 58，并将它们提取到工作记忆中，从而难以选择正确答案。

同样，迪昂（Dehaene，1997）也着重指出了在记忆加法和乘法表时出现的问题。他指出，算式之间并不是彼此独立的，相反，它们在语言上纠缠不清，从而产生容易误导人的相似韵律和容易让人混淆的一语多义。下面这个例子类似于迪昂用来说明语言是如何产生混淆的例子。

假设你必须记住以下三个名字和地址：

- 卡尔·丹尼斯住在阿兰布莱恩街区
- 卡尔·加利住在布莱恩阿兰街区
- 加利·爱德华住在卡尔爱德华街区

要记住这些混杂在一起的组合的确是个挑战，但这些表达恰恰就是一个变相的乘法表。我们用数字 1、2、3、4、5、6、7 分别代表阿兰、布莱恩、卡尔、丹尼斯、爱德华、弗兰克和加利，把“住在”替换成等号，就会形成三个乘法表达式：

- 3×4＝12
- 3×7＝21
- 7×5＝35

从这个角度，我们就可以理解为什么孩子在第一次接触乘法表时会遇到那么大的困难。彼此干扰的模式导致了问题，模式干扰也让我们难以将加法和乘法算式在记忆中保持分离。例如，意识到 2×3＝5 是错的会比判断 2×3＝7 是错的花费更长的时间，因为第一个算式若是换成加法，则答案是正确的。回溯到 1990 年，米勒（Miller，1990）的研究已经揭示了学习乘法算式会与加法互相干扰。他发现，三年级的小学生在开始学习乘法表后，计算加法问题所花费的时间会变长，并且开始出现类似 2＋3＝6 之类的错误。后续研究进一步证实，对于大多数孩子而言，在长时记忆中正确巩固加法和乘法算式仍旧是一个严峻的挑战。 44

历经数百万年，我们的大脑不断进化，赋予我们必备的生存技能。这些技能包括识别模式，产生有意义的联结，以及根据一星半点的信息进行迅速的判断和推论。基本的数数很容易，因为我们拥有将语言与手指动作一一对应的能力，但我们的大脑没有为精确计算所需的算式而装备，比如说乘法，因为这些操作并

不是我们这个物种生存所必需的。使用脑电技术(EEGs)对大脑的研究发现,简单的数字操作,比如数字比较,涉及数个不同脑区。但乘法任务则需要协调多个广泛分布的神经区域,表明有大量的认知操作参与其中(Michieloyannins, Sakkalis, Vourkas, Stam & Simos, 2005)。因此,为了作乘法和精确预算,我们不得不调集那些本来是为其他目的发展起来的心理回路。

> 我们的大脑并没有为精确计算所需的算式而装备。为了进行计算,我们不得不调集那些本来是为其他目的发展起来的心理回路。

4. 语言对乘法学习的影响

如果记忆乘法口诀表这么难,我们的大脑最终又是怎样完成任务的呢?我们最强大的天赋之一就是学习口头语言的能力。在我们大脑的额叶和颞叶区域有着专门处理语言的特定脑区,当面对记忆算式的挑战时,我们的大脑将它们用言语记忆的方式记录,这是我们语言加工体系中一种容量大且记忆持久的部分。我们中的大多数人都能从言语记忆中提取许多年前学过的诗文歌曲。

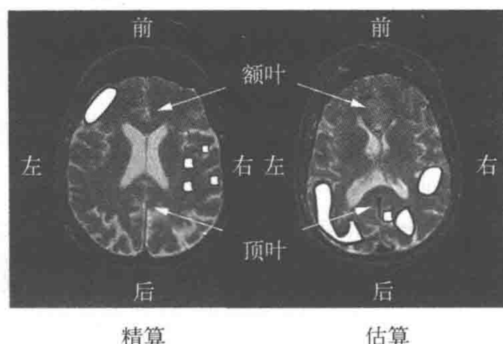
45

教师们早已认识到了语言和言语记忆的力量,他们鼓励学生用大声背诵的方式记忆诗歌和乘法表。因此,计算与学习时所用的语言是关联在一起的。这个联结非常牢固,以至于即使人们学习了第二语言,仍旧会用第一语言来进行计算。不管第二语言有多熟练,转换成第一语言进行计算要比用第二语言重新学习计算容易得多。

迪昂和同事们进行的脑成像研究进一步证实了我们在运用语言能力进行计算。他们假设精确计算会涉及语言加工的脑区,因为精算需要运用数字的言语表征,而估算只需要获得粗略的答案,因而不需要语言的帮助(Dehaene et al., 1999)。

参加实验的被试是使用英-俄双语的成年人,实验者用其中一种语言教他们两位数的加法,然后进行测试。当教学与测验问题使用同一种语言时,被试算出精确答案的时间在 2.5 秒到 4.5 秒之间。如果教学与测验所用语言不同,被试算出精确答案的时间则需要多出整整一秒钟。显然,被试是用那多出的一秒将问题转换成学习时所用的语言。而在粗略估计运算中,问题所使用的语言不会影响被试的反应时间。

在实验中，研究者监测了被试的大脑活动（见图 2.5）。需要给出精确答案的问题主要激活了与负责语言加工脑区相同的左侧额叶部分，而需要粗略答案的问题主要激活了大脑两侧的顶叶区域，这些区域存储了数感并且有助于空间推理。令人惊奇的是，这些结果揭示了我们通过征用负责语言加工的脑区，能够将我们对数字的直觉扩展为精确计算的能力。



精算　　估算

图 2.5　计算时的大脑活动

这些功能性磁共振成像（fMRI）扫描显示，精确计算（左图）主要激活了左侧额叶的语言区，用来加工数字的言语表征。在估算任务（右图）中，最强的激活在两侧顶叶区域，这些区域储存数感，并且有助于空间推理。（获准改编自 Dehaene et al.，1999）

如果想亲自体验语言与精确计算之间存在的联结，你可以尝试一边将两个两位数相乘，一边大声背诵字母表。你会发现这很困难，因为大脑负责背诵的语言区同时也负责心算和推理。

然而，尽管在负责语言和数学推理的脑区之间存在可能的合作，但仍然要明确，这两个脑区在解剖结构上是相互独立并且有区别的。与此有关的进一步证据来自个案研究，研究发现，即便在其中一个脑区受到损伤时，另一个脑区也可能正常行使功能（Brannon，2005）。因此，教师不能想当然地认为在语言加工上有困难的学生必然在计算上遇到困难，反之亦然。

> 由于负责语言和数字加工的脑区是相互独立的，教师不能想当然地认为在语言加工上有困难的学生必然也会在计算上遇到困难，反之亦然。

5. 乘法表是助力还是阻力

这是一把双刃剑。要知道儿童进入小学时已经具备了有限的但已有相当发展的数感，这归功于大脑的模式识别能力。他们已经能够感知数量，并且通过试误学会了不少简单的数数策略。但是正如上文所提到的，低年级阶段的计算教学总是采用直接练习算式的方法，却有意回避这些直觉能力。

如果将孩子引入计算的过程主要依赖于对乘法表或者其他的算术机械记忆（如：减法的步骤程序），那么他们对于数字关系的直觉理解力就会渐渐被破坏和压

制。结果是，他们就会从对数字的直觉加工转向忽略数字意义的自动化数字运算。

而反过来，如果在计算教学开始时就充分利用孩子的数感，感数和数数策略与新的数学运算建立联系，那么乘法表就能够成为帮助他们加深对数学理解的工具，而不仅仅是为了背诵而背诵。

有些学生可能在家就已经学习了乘法表。我的建议是，评估每个学生计算个位数乘法的程度，然后引入利用点、图或卡片的活动，帮助学生练习连续加法（乘法的底层概念）。这里的观点是要利用学生对于模式的本能感觉，在没有记忆乘法表的情况下建立乘法的联接网络。当然，这个方法并不是对每个学生都适用，对于某些学生来说，记忆乘法表可能是唯一有用的方法。

47

三、下章预告

人生来具有数感，数感可以帮助人判断一小堆物体的数量，并且进行基本的数数、加法和减法。我们如何利用这些直觉帮助学生学习更复杂的数学运算呢？当今认知神经科学的研究可以告诉我们哪些有关大脑如何学习的信息呢？当我们思考有效数学教学方法时，又该如何运用这些信息呢？这些问题的答案将在下一章中揭晓。

48

四、本章反思



在此页简略记下要点、想法、策略和资源，以备日后思考。此页是你的个人日志小结，它能帮助你日后回忆。



第三章　回顾学习的基本要素

数学家和画家或诗人一样，都是模式的缔造者。如果说数学家的模式比画家和诗人的更为恒久，那只因为它们是由思想构筑的。

——戈弗雷·哈罗德·哈代(Godfrey Harold Hardy)

在本章后面的章节，我们将着眼于针对幼儿、前青春期儿童和青少年的具体的数学教学方法。然而，在此之前，我们应该先回顾一下学习的基本要素。高效率的教师会不断地评估他们在教学策略上的选择是否与研究所揭示的大脑学习模式相一致。本章将深入探讨近期的研究发现，以使教师们能将其与自己已有的知识相比较。我们会在第八章介绍如何在数学课程设计中应用这些研究。

一、学习与记忆

我曾经问过世界各地的教师这样一个问题："你希望你的学生们把你教给他们的知识记多久？"他们的回答总是："永远！"但真的能做到吗？几乎不可能。一些教育评论家曾经推测，美国学生在高中毕业后的两年时间内就会忘记课堂上所学的80%的内容。我们无法了解这个数据是否准确，但是大多数人都知道，我们在学校

里学习的很多知识都不会被永久地储存。

50 早期的研究经常使用数字来测试记忆的特性,因此科学家们一直认为短时记忆和长时记忆都会极大地影响我们的数学能力。我们将在本章以及后面的章节讨论记忆对计算的影响。要想让学生记住课程内容,先来简要回顾一下大脑的记忆部分是如何工作的。

1. 记忆系统

如果你在几十年前学习过记忆系统的话,你可能知道人类有两种主要的记忆:一种是被称为短时记忆的暂时性记忆,另一种是被称为长时记忆的永久性记忆。现在的神经学家认为人有两种执行不同任务的暂时性记忆。这可以解释大脑是如何做到既能快速地处理一些数据,又能够在更长的时间里继续处理其他数据的(即便这些信息没有被永久储存)。认知神经学家用"短时记忆"来命名暂时性记忆,它包括两个阶段:瞬时记忆和工作记忆(Squire & Kandel, 1999)。图 3.1 举例说明了我们的暂时性记忆和永久性记忆所经历的几个阶段。

瞬时记忆

瞬时记忆是两种暂时性记忆中的一种,在图 3.1 中由一个文件板夹来代表,它是指在我们确定如何处理某一信息前暂时存放信息的地方。瞬时记忆能无意识或有意识地操作和保存数据长达 30 秒。(注:这里采用的数据是时间上的平均值,经常会有个体差异或病理性原因导致的特例。)个体经验决定了信息的重

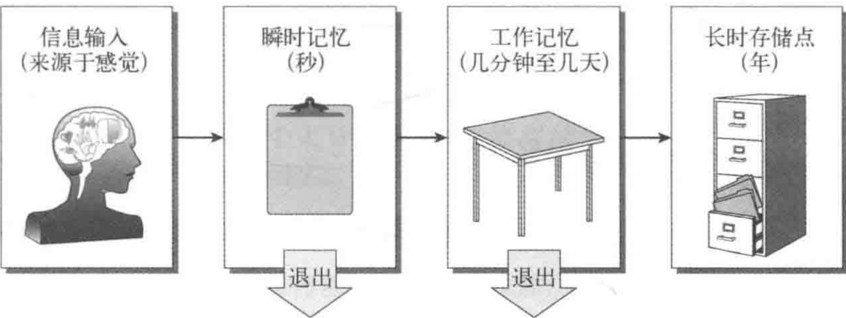


图 3.1 暂时性记忆和永久性记忆

图中举例说明了暂时性记忆和永久性记忆理论。信息通过人的感觉输入,只在瞬时记忆中持续几秒。在工作记忆中,信息通常保持几分钟或几小时,但如果需要的话,可以保存几天。长时存储点(也叫作永久性记忆)可将信息存储几年。

要程度。如果在这个时间范围内信息不那么重要，它就会从暂时性记忆系统中退出。例如，当你查找当地比萨店的电话号码时，通常你能记住它的时间正好够你把这个电话拨出去。在那之后，这个电话号码就不再重要了，它会从瞬时记忆中退出。下一次你打电话时，将不得不重新查找电话号码。

工作记忆

51

现在假设另一种情况，比如你无法决定外卖是叫比萨还是中式快餐，并且和房间里的另一个人讨论了这些选择。因为这种情况需要更多的注意，所以信息被转移到工作记忆中进行完全意识加工。在图 3.1 中，工作记忆用一个工作台来表示，它是一个容量有限的地方，在这里我们可以创建、剖析或修订信息，使其最终被清理或存储到其他地方。当一些信息存储于工作记忆中时，它通常会获得我们的关注并需要我们的注意。

工作记忆的容量。工作记忆只能同时处理几条信息（表 3.1）。这个功能性的容量随年龄而变化。学龄前儿童能同时处理大约两个项目的信息；前青春期的儿童能处理 3～7 个项目，平均为 5 个。度过青春期后，认知进一步成熟了，容量扩展到 5～9 个，平均为 7 个。对大多数人来说，这个数字会贯穿一生而不变。（然而，你可能会回忆起第一章所说的，对数字的工作记忆容量在不同文化中会有所不同，这取决于文化中构建数字词的语言和语法系统。）

表 3.1　工作记忆容量和存储时间界限随年龄而变化

年龄（年）	容量的平均数和标准差（组块）	存储时间的平均数（分钟）
小于 5 岁	2 ± 1	没有可靠的数据
5～14 岁	5 ± 2	5～10
14 岁及以上	7 ± 2	10～20

这个有限的容量解释了为什么我们不得不分阶段记忆一首歌或一首诗。我们从第一组内容开始，通过频繁地重复来记忆（被称为复述的过程），然后再记忆后面的内容，并和第一组一起重复，然后依次继续。我们可以通过一种被称为组块的方法来增加工作记忆的功能性容量。在算术运算中，当幼儿的头脑快速识别出 3 + 1 + 1 和 3 + 2 都等于 5 时，组块就产生了。

52

这些研究表明，教师在安排课堂上呈现的信息数量时应该考虑这些界限。

换句话说，少即是多。

工作记忆的存储时间范围。工作记忆是一种暂时性记忆，并且只能在有限的时间内处理信息（表 3.1）。对青春期前的儿童来说，这个时间大概为 5～10 分钟，对青少年和成人来说是 10～20 分钟。请注意，这些是平均时间，并且理解这些数字的意义很重要。青少年（或成人）在对一个项目感到疲劳和厌倦并转移注意之前，能够在工作记忆中专心地处理该项目 10～20 分钟。要继续集中注意力，必须在个体处理项目的方式上做一些改变。举个例子，一个人可能需要从听一个概念转换到身体力行地应用它，或者对其他人转述，或者将它与其他知识相联系。如果没有用其他方式处理这个项目，那么它可能会淡出工作记忆。

教师在安排课程时应该记住，工作记忆有容量限制和时间限制。少即是多！短即是好！

当然，一些项目能在工作记忆中保存几小时甚至几天。有时，我们会有一个未解决的遗留项目——一个我们在寻找答案的问题，或是一个充满纠纷的家庭，或是一个必须做出的工作决策。这些项目会保留在工作记忆中，持续支配一些注意，而如果它十分重要的话，则会干扰我们对其他信息的精准处理。最终，我们解决了这个问题，并且将它从工作记忆中清除。

这表明教师在安排课程的流程时，应该考虑工作记忆的时间限制。换句话说，短即是好。

53

2. 复述可以增强记忆

教师应该确保已经采用了为增加学生记住新知识的可能性而专门设计的教学策略。如果学习者有充足的时间去加工和再加工信息，那么任何新知识都更有可能被记住。这个持续地重复加工信息的过程被称为复述，它是将信息从工作记忆转移到长时记忆的关键。

复述的类型

初级复述和次级复述的时间。时间是复述的关键成分。初级复述发生在信息最初进入工作记忆时。如果学习者不能赋予新信息以意义，或者没有时间进行更深入的加工，那么这个新信息就很可能被丢失。给予足够的时间以使信息从初级加工进入次级复述，可以使学习者复习这个信息，理解它，在细节上进行

详细描述，并赋予其重要性和相关性，从而大大增加信息被保留的机会。

脑成像研究指出，在复述过程中，或者从根本上说，在长时记忆的形成过程中额叶有很高的参与度。这是言之有理的，因为工作记忆也是位于额叶中的(Goldberg，2001)。对人体被试进行扫描的几项功能性磁共振成像研究显示，在较长的复述过程中，额叶的激活量决定了项目是被储存还是被遗忘(Buckner，Kelley & Petersen，1999；Wagner et al.，1998)。

机械复述和精细复述。机械复述是学习者在准确地将信息记忆和存储到工作记忆中时所需要的。这不是什么复杂的策略，但是需要以特定的形式或正确的顺序去学习信息或认知技能。我们在记忆诗歌、歌曲的旋律和歌词、电话号码、程序的步骤和乘法表时都使用机械复述。当不需要完全按照所学状态精确地存储信息，更重要的是将新知识与先前所学知识相联系以探查其中关联时，我们会使用精细复述。这是一种更为复杂的思考过程，学习者对信息进行多次再加工，以使其与先前所学知识相联系，并赋予其意义。学生使用机械复述记忆数学算式，但用精细复述去发掘数学概念更深层的意义以及数学概念之间的相互关系。

当学生几乎没有时间进行精细复述，也几乎没有受到过这方面的训练时，他们会对几乎所有加工都采用机械复述。最终，他们难以找到那些只有通过精细复述才能建立的联结，或只有通过精细复述才能发现的关系。

例如，假设一名教师用以下方式在课上讲述分数除法：　54

$$15 \div \frac{1}{4} = 15 \times \frac{4}{1} = 60$$

当学生做分数除法时，他们不去探索和理解其中所使用的数学原理，而只是简单地记住机械的规则："我们不用问为什么，只需要颠倒分数再去乘！"因此，他们会认为学习数学仅仅是回忆学过的知识，而无法认识到通过学习数学产生新想法、概念和解决方法的价值。通过简单地增加一些与学生生活相关的例子，就可以使数学学习具有更大的意义。例如，在这节课中，教师可以说："我们有15个比萨，如果要把每一个切成(除)4块，那我们将会有多少块？"每个被切成4块的比萨的视觉表象，能帮助学生认识到分数除法的意义。

⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

把15个比萨中的每个都切成4块，就有60块了。

机械复述对于某些有限的学习目标是有价值的。几乎所有人都是通过机械复述来学习字母表和加法、乘法表的。但是，机械复述只是让我们简单地以特定的顺序获得信息。通常的情况是，学生们在课堂上过于频繁地使用机械复述来记忆重要的数学术语和算式，却不能使用这些去解决问题。他们会在判断对错或填空的测试中做得很好，但是在解决需要将知识应用到新情境中的更高层次的问题时就会遇到困难，特别是对于那些有不止一种解决方案的问题。需要认清的是，复述只能帮助却不能保证信息会转移到长时记忆中。然而，没有复述就几乎不能将信息转移到长时记忆中。

3. 意义的重要性

实验和经验证据都显示，数学内容对学生来说通常是没有实质意义的。那么意义为什么如此重要？之前我们提到，复述是一种提高将新知识储存到长时记忆可能性的方式。然而，其他条件也起了重要作用。图 3.1 显示，工作记忆中的信息要么被编码进入长时记忆以备日后回忆（从书桌到文件柜），要么从记忆系统中被清除。大脑会选择哪一个？这是一个很重要的决定，因为之后我们无法回忆没有储存下来的信息。

55

工作记忆是以什么标准来做出这个决定的？那些具有存在意义的信息会伴随着强烈的情感体验而迅速被储存，但是在教室中，由于缺少存在意义和情感因素，其他的因素就会产生更大的影响。由此看来，工作记忆与学习者过去的经历息息相关，并且只通过两个问题来决定是保留还是清除某些信息。它们是：

> 如果信息自身是有意义的或对学习者是有意义的，它就更可能会被储存。

- “这个是否合理？”这个问题是指学习者能否根据已有经验理解这些数学内容。它是否与学习者已经知道的数字和运算知识“相符”？当一名学生说“我不理解”时，他的意思是说他在理解这个知识的合理性上有些问题，通常是因为无法与先前所学相联系。
- “这个是否有意义？”这个问题是指这个内容是否与学习者相关，学习者为什么要记住它。意义是一个非常私人的东西，并深受个人经历的影响。相同的内容可能对某个学生意义重大，而对另一个学生则没有任何意义。当学生提出类似“我为什么要知道这个”或“我什么时候能用上这

个"的问题时，无论是出于什么原因，都表明学生不认为这些知识与自己有关。

学习的目的不只是为了获取知识，也是为了学生在相关联的不同情境中能够应用知识。为了达到这一目标，学生需要对学习中包含的概念进行更深层的理解。这就是数学教师经常听到学生问"为什么我们需要知道这个"的原因所在。如果教师不能以一种对学生来说有意义的方式来回答这一问题，那么我们就不得不重新思考教授学生这一知识的理由了。

如果教师不能用一种对学生来说有意义的方式来回答"为什么我们需要知道这个"的问题，那么我们就不得不重新思考教授学生这一知识的原因了。

每当学习者的工作记忆判定某种知识既不合理也没有意义时，那么它被储存的可能性就极低(当然假设没有生存或情绪成分出现)。如果它合理或者有意义，被储存的可能性就显著提高了。如果既合理又有意义，那么被长久储存的可能性就非常高了。脑扫描结果显示，当新知识很容易被理解(有合理性)并能与过去经验相联系(有意义)时，大脑会有大幅增多的皮层活动，信息被长久储存的可能性随之大大提高(Maquire, Frith & Morris, 1999)。

56

为什么意义如此重要

在这两种标准中，意义对信息被储存的概率有更大的影响。回想一下所有你看过但没有记住的电视节目，甚至你花了一两个小时去看也没能记住的节目。你理解了这个节目的内容或情节，但是如果它对你来说没有什么意义，你就不会储存它。现在回想一下数学学习的过程，学生们会勤奋地跟随老师的指令去记忆算式，或反复地完成一系列任务，并可能得到正确的答案。但是如果他们在这段学习结束前没能获取到意义，这些信息就几乎不会进入长时存储。数学教师经常会因此而感觉受到打击。老师可能看到学生们在某天能使用某个公式去解决问题，但第二天就不记得应该怎么做了。如果一个过程没有被存储，那么大脑重新处理这些信息时，就会像对待全新的知识一样。

有时，当学生们问为什么他们需要知道一些事情时，教师的回答是"因为考试会考到"。这个回答会增加学生的焦虑感，但几乎不能增加知识的意义。学生们把知识记在笔记本上，因此它只保存在笔记中，却没有保存在记忆里。然后，

第二天我们惊讶于他们已经忘了前一天学的内容。

> 当数学老师看到学生们某天能使用某个公式去解决问题，但第二天就不记得应该怎么做的时候，会感觉受到打击。如果这个过程没有被存储，那么大脑重新处理这些信息时，就会像重新对待全新的知识一样。

教师们花费了 90%的备课时间来确保学生们能理解课程的内容，但教师们需要花更多的时间帮助学生们建立知识与他们相关联的意义。要记住，10 年前对学生有意义的东西，现在不一定对学生有意义（Sousa，2006）。

意义 VS. 自动反应

57

之前我们已经提到过，进化没有让我们的大脑为学习乘法表、复杂的算法规则、分数或任何其他形式的数学运算做好准备。因此，无论我们的大脑具有什么样的网络，在进行正式的数学运算时，大脑都只得以它现有的网络去设法应对，即使这意味着要采取一系列连大脑的主人也不理解的步骤。这导致的结果是，当孩子们花时间去记忆运算表和算式时，他们就变成了小型计算器，可以进行运算，却不理解运算中涉及的算术规则。

> 人类作为一个物种，在进化过程中没有让大脑为学习乘法表、复杂的算法规则、分数或任何其他形式的数学运算做好准备。

当学生们试图用记住的知识处理简单的算术运算时，他们经常不考虑问题的相关条件而直接跳到结论。他们对计算机制非常熟练，以致不需要理解就能得到答案。而且，与解决问题相关的语言可能干扰大脑对需要计算的内容的理解。举个例子，请快速回答下面的问题：

- 一个玻璃缸里有 9 条鱼，除了其中 6 条，其余的都死了，还剩下几条？
- 比利有 6 个人形公仔，比乔伊少 3 个，乔伊有几个人形公仔？

你是否对以上任何一个问题都回答是 3？在第一个问题中，出现的数字 9 和 6、“除了……其余的都”和“还剩下几条？”，都引发了一种强烈的要计算减法 $9-6=3$，然后得到结果 3 的念头。正确的答案是 6，但是要得出这个答案，你必须去想这个问题在问什么，并且要避免对符号的盲目处理。第二个问题也一样，和“比……少”一起，看到数字 6 和 3，足以触发你脑中的减法模式：$6-3=3$。然而当你思考这个问题时，你就会意识到应该把 3 和 6 相加，以得到正确答案——

乔伊有 9 个人形公仔。

在这两种情境中，你不得不与自动反应相抗衡，并且真正去分析每一个问题。这是大脑额叶前部区域的职责。大脑额叶前部区域紧靠在额头后，叫作前额皮层（见图 3.2）。然而，前额皮层的发展非常缓慢，直到 22～24 岁才会完全成熟。因此，儿童和青少年在做决定时会容易冲动。在学校中，他们的前额皮层区域没有太多机会去形成特殊策略以抵抗自动反应，以及避免文字应用题中含有的运算陷阱。对学生们来说，要精通数学计算，就必须抵抗自动和无意义的反应，全面地思考分析情境，选择适合目前问题的计算方法。

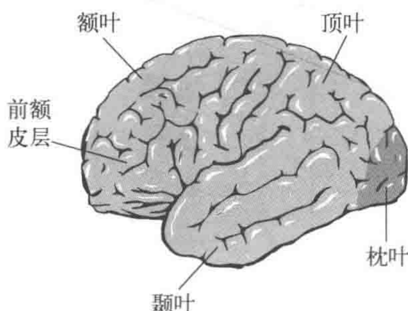


图 3.2　前额皮层

前额皮层是额叶的一部分，主要用以分析问题并实现，以及控制非常规策略。

因此，教师就成为让学习者看到数学计算与其意义之间联系的途径。虽然我们承认有必要让学习者记住一些算式，但是记忆不应该成为教学的主要部分，尤其不应该以牺牲探究数学运算的内在规则为代价。这样做会侵蚀学习者对估算和计算的直观理解，就像我们在第二章中讨论的那样。然后，学生们会仅仅把运算理解为没有实际应用和没有明确意义的机械记忆。这种观点令人沮丧，会导致失败，甚至会导致学生对数学的终生厌恶。

4. 知识是如何被储存的

信息能够以不同的方式储存。长时记忆主要分为两种类型：陈述性记忆和非陈述性记忆（见图 3.3）。

陈述性记忆（也称为有意记忆或外显记忆）。陈述性记忆是指对名字、事实、音乐和物体的记忆。当你想到和某个亲近的人一起参加的一个重要活动，比如一场音乐会、婚礼或者葬礼时，你会注意到记忆里的其他部分会很自然地随之被记起。这就是陈述性记忆最常见的形式——有意识的和几乎毫不费力的回忆。陈述性记忆又分为情景记忆和语义记忆。

情景记忆是指我们对生活中发生的事件的有意识记忆，例如 16 岁生日聚会，从自行车上摔下来，或者今天早餐吃了什么。它帮助我们识别事件发生的时

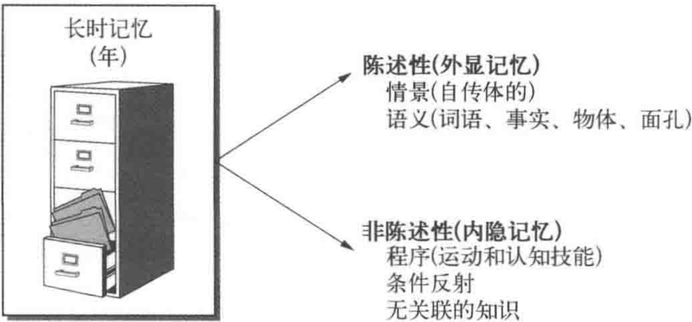


图 3.3 长时记忆

长时记忆主要由两种类型组成。陈述性记忆是对我们认识的人、我们的词汇量和相关日常信息的记忆。非陈述性记忆由大量的自动化程序组成,例如开车或者将两个三位数相乘。

间和地点,并让我们能够自我感知。情景记忆是关于个人的自传体式的记忆。

语义记忆是关于事实和数据的知识,可能不与任何具体事件相关联。就像我们知道埃菲尔铁塔在巴黎,如何表达时间,以及二次方程公式等。语义记忆是实际知道的记忆。一名学生后来能回忆起毕达哥拉斯定理,使用的是语义记忆;而回忆他学习毕达哥拉斯定理时在教室的经历,是情景记忆。

59

> 我们通过包含理解和意义的陈述性步骤,教授越多的算术,就会有越多的学生成功并真正享受数学。

陈述性记忆经过精细复述的加工会有大幅的增强,因为对于事实、人和事件的记忆,当我们能在它们之间建立联系时会被保存得最好。这些联系通过精细讨论,从新的角度看待事物,对情境加以分析,以及深入理解我们做出某个决定和采取某种行为方式的原因等途径而建立起来。我们在这些创造性的和分析的过程中建立的联系越多,记忆就可能越牢固,保留时间就越长。这可以在我们的数学教学中加以应用吗?

非陈述性记忆。非陈述性记忆(也称为内隐记忆)是指除了陈述性记忆以外的所有其他记忆,是用于对不能直截了当地阐述或解释的事物的记忆。数学教学中最常用的记忆是非陈述性记忆的一种,称作程序性记忆。

程序性记忆是指对运动和认知技能的记忆,以及如何做某事的记忆。例如骑自行车,开车和系鞋带。随着对技能的不断练习,这些记忆能够变得更有效率,并且几乎不需要有意识的思考和回忆。大脑的加工从反应性的变成反射性的。我们日常生活中的很多行为——例如,吃早餐、上班和跟新认识的人握手,

60

都包含着技能的运用，我们在做这些事时并没有意识到在使用记忆。尽管在学习一项新的技能时会有所意识，但是学成之后完成技能就变成无意识的了，并且在本质上依赖于非陈述性记忆。

我们也学习认知技能，例如阅读、识别颜色，思考解决问题的步骤。认知技能（例如完成机械的数学运算）与加工认知概念是不同的，因为认知技能是自动完成的且依赖于程序性记忆而不是陈述性记忆的。程序性记忆和认知技能的获得所涉及的大脑加工和记忆储存点与认知概念学习不同。如果学习机制不同，那么是否应该采用不同的教学方法？

> 程序性记忆帮助我们学习不需要有意识注意的事物，比如，如何完成死记硬背的数学运算。

程序性记忆可以通过重复机械的练习增强。事实上，这是我们能记忆某些信息的唯一的方法，比如记单词或如何增加一列数。因为按照程序一步步地解决问题，经常会得到我们想要的结果，所以我们能在没有意识输入和不知道为什么要这么做的情况下执行这些步骤。

脑成像研究指出，程序性记忆和陈述性记忆储存于大脑的不同区域，并且陈述性记忆可能会被忘记，而程序性记忆不会被忘记（Rose，2005）。这种记忆存储的分区是有意义的。陈述性记忆需要有意识的输入和加工，所以需要额叶积极参与；程序性记忆会触发一系列自动步骤，这通常是无意识加工或不需要额叶的参与。这就可以解释为什么你能在开车上班（程序性记忆）的途中同时计划你当天的生活（陈述性记忆）。

5. 新知识应该何时在课堂中呈现

个体在加工新信息时，信息被储存的数量还取决于它在学习阶段是何时被呈现的。在学习过程的某一时间段，我们会比在其他时间段记住得更多。

首因-近因效应

61

在一个学习阶段中，我们通常对最先出现的内容记得最好，其次是最后出现的，记得最少的是中间阶段出现的内容。这种常见的现象被称为首因-近因效应（也称为系列位置效应），这不是一个新的发现。最早关于这个效应的研究发表于19世纪80年代。

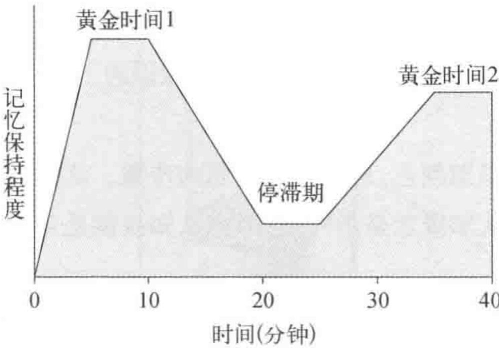


图 3.4 一个学习阶段中的记忆保持

我们对最先(黄金时间 1)和最后(黄金时间 2)出现的内容记忆得最好,对刚过中点出现的内容记忆得最少。

更多近期的研究帮助解释了这种效应产生的原因。新信息的第一部分内容处于工作记忆的容量限制范围内,所以它们引起了我们的注意并且可能被保留在语义记忆中。而稍后的信息超出了表 3.1 所显示的容量,所以丢失了。当某一学习阶段结束后,工作记忆中的内容被分类或分成组块,从而可以对最后进入的内容进行额外的加工,这些最后进入的内容可能被保留在工作记忆中,但如果不进行进一步复述,将可能会消退(Gazzanniga, Ivry & Mangun, 2002; Terry, 2005)。

图 3.4 显示了在一个 40 分钟的学习阶段中,首因-近因效应是如何影响记忆力的。注意,时间是平均和估计的。这是一个双峰曲线,每一个峰代表在那个时间阶段里最大的记忆保持程度。在我个人的研究中,我喜欢把第一个峰或初峰称为黄金时间 1,把第二个峰或近峰称为黄金时间 2。在这两个峰之间是学习中记忆保持最少的时间段,我将那个区域称为停滞期。这个阶段不是没有记忆发生,而是记忆难以保持。

> 在一个学习阶段中,我们对最先出现的内容记得最好,其次是最后出现的,记得最少的是中间阶段出现的内容。

6. "熟"一定能生"巧"吗

练习是指学习者随着时间推移对运动或认知技能的重复。练习开始于在工作记忆中对新技能的复述,然后唤起对这个技能的记忆,并进行补充练习。学习者的练习质量和知识基础会在很大程度上决定每一个练习阶段的成效。

62

俗话说"熟能生巧"在很多情况下是不适用的。很可能我们反复地练习相同的技巧,却没有在表现或应用的精确度上有所提高。回想一下你认识的人吧,他们一直在开车、做饭,甚至教了很多年书,他们的技能却没有提高。这是为什么

呢？为什么一个人持续地练习，却没有进步？

获得成功练习的条件

要想通过练习来提升成绩，必须具备四个条件（Hunter，2004）：

（1）学习者有足够的提升成绩的动机。如果学习者没有找到学习的意义，那么动机就很弱。

（2）学习者具有必备的知识，能理解应用新知识或技能的不同途径。

（3）学习者理解如何应用新知识解决特定情境中的问题。

（4）学习者能够分析新技能的应用结果，并知道为了以后提升成绩需要改变什么。

有指导的练习、独立练习和反馈

"熟"不一定能生"巧"，但"熟"可能产生永久性的影响，因而有助于学习知识的保持。因此，我们要确保学生从最开始就能正确地练习新学习的内容。最初的练习是在教师的带领下进行的（即有指导的练习），教师能提供快速且正确的反馈来帮助学生分析并提高他们的练习效果。当练习正确的时候，教师就可以让学生们进行独立练习（经常是作业）。学生通过独立练习，能够独自复习技能以促进记忆的保持。这个策略会造就完美的练习，正如教练维斯·隆巴尔迪（Vice Lombardi）曾经说过的，"完美的练习才能生巧"。

> "熟"不一定能生"巧"，但"熟"能产生永久性的影响。

教师应该避免在有指导的练习之前就让学生进行独立练习，因为练习可能产生永久性的影响。因此，教师不在学生身边而允许学生自己进行数学运算的首次复习是非常危险的，如果他们在不知不觉中错误地练习了技能或步骤，那么他们也将牢牢地记住错误的方法！这对教师和学生来说都将可能是严重的问题，因为要改变已经练习过且记住了的技能是非常困难的，哪怕这些技能是不正确的。此外，学生对于花费课余时间去练习不正确的技能会感到受挫和恼怒，并且会失去学习正确方法的动机。这种情况的频繁出现会导致对数

> 让学生们在有指导的练习前进行独立练习，可能会导致他们学习了一种错误的程序。

63

学学习的不良态度。

忘却并重新学习一项技能或程序。如果学习者错误地练习了一个数学解题程序，那么忘却并重新正确地学习这个程序是很难的。忘却并能成功地重新学习这个程序的可能程度取决于：

- 学习者的年龄（例如，越年轻，再学习就越容易）；
- 错误练习技能的时间长度（例如，时间越长，改变就越难）；
- 再学习的动机强度（例如，想改变的意愿越强，就越会努力去改变）。

在任何情况下，对教师和学生来说，忘却错误的方法并学习正确的方法，都是一条很艰难的道路。

集中练习和分散练习

亨特（Hunter，2004）建议教师随着时间的推移采用两种不同的练习方式。（亨特使用的"练习"一词包含复述的过程。）在密集的时间段里练习新学的知识称为集中练习（见图 3.5）。集中练习会导致快速学习，就像在心里复述乘法表时一样。这个阶段会有瞬时记忆的参与，如果不马上复述，信息就会在几秒钟内消退。

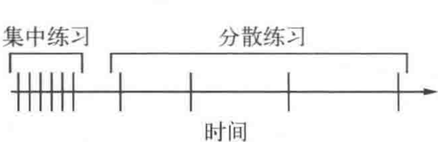


图 3.5 集中练习和分散练习

在短时间内重复练习称为集中练习。间隔时间较长的重复练习称为分散练习，记忆在分散练习中更容易保持。

当数学教师在较短时间内，比如说在一节课的时间里，让学生们应用新公式或新概念去尝试解答不同的例题时，就是在提供集中练习。集中练习的一个例子就是为了考试的填鸭式复习。信息可以被快速组块进入工作记忆，但是如果没有更持久的练习迅速跟进，对信息的记忆很快就会被清除或忘记。发生这种情况是因为信息没有更深层次的意义，因此长时存储的需要就不存在了。

64

坚持一段时间的持续性练习被称为分散练习，这是记忆保持的关键。如果之后想记住乘法表，那么你需要反复使用它。因此，间隔较长时间的分散练习能维持意义，并且以一种确保在未来被精确回忆和应用的形式将知识

> 填鸭式复习是集中练习的一个例子。为了考试，信息被快速组块进入工作记忆，然后它们就会被忘记，除非有持续性练习迅速跟进。

巩固到长时记忆中。

有效的练习从快速学习的集中练习开始，然后进入分散练习以保持记忆。这样，一年（或几年）来，学生都在不断地练习之前学的技能。每次考试不仅应该测试新知识，也要让学生能够练习重要的旧知识。这个方法不仅有助于保持记忆，而且能提醒学生所学知识在将来是有用的，并不只是为了这一次的学习和考试。这就是螺旋式课程设计背后的原理，即关键的数学算式和技能会在同年级内和几个年级中定期复习。

7. 纳入写作活动

《学校数学教学原则与标准》（NCTM，2000）中写道："写数学方面的东西也能帮助学生巩固他们的想法，因为这需要他们去反思工作，以及理清他们在课堂上产生的想法。"在课堂上，写作是交流的一个重要组成部分，并且已有研究强调了写作对学生学习数学的益处（Pugalee，2001；Stonewater，2002）。

写作对于数学的益处

通过写作活动，教师能帮助学生：

- 更有效率地学习数学概念，发展批判性思维并提高问题解决能力；
- 永久性地记录一些想法，他们可能会回过头来反思这些想法；
- 整理想法，探索知识的新应用，解决包含数学运算的问题；
- 通过学习者与学科以及学习内容的互动，帮助学习者积极主动地学习；　65
- 通过学习者与学习内容的无声对话，帮助学习者内化知识，并在学习过程中清晰地表达出来；
- 与新的数学概念建立个人的联结；
- 参与主动构建知识的过程，学生们在这个过程中可以决定什么是重要的，以及什么对他们自身有意义或者有关联；
- 在处理他们关注的问题时获得自我认识和自信心；
- 使主题个性化，这样学生可以有选择性地将知识应用到他们感兴趣的领域。

除了帮助学生们理解数学概念，写作还提高了他们在其他课程中运用写作技能的信心。在第八章，你将看到关于如何将写作结合到数学课中的具体建议。

8. 数学中的性别差异

最近几十年来，在标准化测试中，例如学术能力评估测验(SAT)和美国国家教育进展评估(NAEP)中，男生的数学得分一直比女生高。在高中和大学的数学课堂中，男生总是占多数。那些试图解释这种性别差异的人通常会把责任归咎于陈旧的社会刻板印象。然而，最近他们又把一些脑科学研究的发现作为对性别差异的可能解释。比如，他们引用了男性的大脑大约比女性的大脑大6%～8%的事实，但实际上男性在身高上普遍比女性高6%～8%，这也可以解释他们在大脑尺寸上的差异。并且，脑成像研究表明男性在视空间能力(在大脑中旋转物体的能力)上有优势，而女性更擅长语言加工。在女性大脑中，被称为胼胝体的连接两个大脑半球的神经束，从比例上来说比男性大脑中的更大更厚。这说明女性大脑两半球之间的交流比男性更有效。然而，在男性大脑中，大脑两半球内部的交流频率似乎更高。但是，这些差异是否能证明男性在数学加工方面具有遗传优势，还有待考察和证实。

刻板印象威胁

66

尽管数学测验的成绩有性别差别，但研究者仍相信社会环境起了重要的作用。例如，职业选择上的差异并不是由数学能力上的差异导致，而是由文化因素造成的，比如在高中就显现出的微妙但普遍的性别期许。一项研究指出，仅仅是告诉女生在数学测验中通常会显示出性别差异，就足以降低她们的成绩(Spencer，1999)。这种现象叫作刻板印象威胁，通常在人们认为会受到所属群体的基于社会刻板印象的评价时产生。研究者分别对男性和女性进行了数学测验，他们告诉一半女性，这个测验可能会显示出性别差异，告诉另一半这个测验不存在性别差异。对性别差异有预期的女性在测验中的表现显著差于男性，而那些被告知不会有性别差异的女性，在测验中则和男性表现相当。需要说明的是，这个实验所选择的样本都是数学成绩拔尖的女性。

> 数学成绩上的性别差异更可能是文化因素而不是遗传因素导致的。

另外一个关于刻板印象威胁的研究设计是让人们感觉到他们所具有的优势，而不是在刻板印象中的劣势(McGlone & Aronson，2006)。这会有助于提高

他们在被认为不擅长的领域(比如数学)的成绩吗？研究共调查了 90 名大学生，其中男女生各一半，完成同一份问卷。首先，询问第一组被试是居住在一个单一性别还是男女合住的学生宿舍里，因为在先前的研究中，这个问题被证实能激活男性和女性的刻板印象。然后，让第二组被试回答为什么选择进入一个私立文科大学。根据研究者的假设，这是在尝试激活他们的“势利模式”。最后，第三组被试作为控制组，要求他们写出在美国东北部生活的经历。

在一项与数学成绩相关的视空间能力标准测试中，那些受此启发，感觉到他们拥有专属的私立文科大学学生地位的被试中，性别之间的差异消失了。女性被试的得分提高了，而男性被试的得分和控制组一样。在研究中，男女被试的得分无显著性差异，仅仅改变了女生对自己的看法，就提高了她们的测试成绩。

教学方法缩小差距

尽管大多数神经科学家承认，在大脑处理信息的方式上存在性别差异，尤其是对于年幼的儿童，但他们不愿意支持这样的观念，因为这种差异会使得某一性别相对另一性别在任一学术领域中存在终生的学习优势。斯佩克(Spelke，2005)回顾了 111 项研究和论文，发现大多数研究认为，男性和女性的数学和科学能力在童年早期的认知体系中是有遗传基础的，但他们在数学和科学上的天资是整体相当的。

67

对教育家来说，至关重要的是了解这些性别差异以及它们在人类发展不同阶段是如何变化的。这里的危险在于，如果人们认为这些性别差异是固有的和不可改变的，那就无法改变这种处境了。这种想法是具有破坏性的，因为这让学生们感到灰心，并且忽视了当有适当激励时大脑的适应性(通过经历不断地改变的能力)和学习复杂信息的超常能力。我们有各种教学方法和策略可以弥补这些性别差异。

9. 考虑学习风格

随着青少年的成熟，他们的学习风格也逐渐开始成熟并得以巩固。学习风格是指个体在学习情境中的学习方式和偏好，可能是遗传因素和环境因素共同作用的产物。学习风格由若干变量组成，包括：

- 感觉偏好(我对听觉、视觉还是动觉-触觉输入有偏好);
- 大脑半球偏好(我通常是用更具分析性的还是更具全局性的眼光来看世界);
- 与第一章提到的加德纳的 10 种智能相似的智力偏好(我的智力中的强项和弱项是什么);
- 参与偏好(我是学到什么就立刻去做,还是先进行思考);
- 感觉/直觉偏好(我是喜欢用已有的方法学习算式和解决问题,还是更喜欢自己探索其中的可能性以及相关关系)。

记住,以上内容仅供参考,每个人的学习风格并不是一成不变的。如果需要的话,每个人都可以暂时从一种风格变为另一种风格。如果你只考虑这五个学习风格变量及其构成,并意识到这其中的许多变量位于一个连续体上,那么你很快就能意识到这会有上千种可能的排列。教师如何能在一个课堂上满足这么多的可能性? 如果缩小可能性的范围,就会有所帮助。

关于多元智能

在加德纳提出多元智能理论后的 20 多年来,教育家们已经将他的观点应用到课堂实践中的活动。你会惊讶地发现,只有很少的神经科学证据能支持加德纳的理论。最优秀的神经科学家所能说的也只是:扫描研究显示,大脑的不同区域用以执行与加德纳提出的各个不同智能相关的特定任务。例如,语言加工主要在左额叶,而许多视空间操作则通常位于右顶叶。音乐创作和音乐加工由颞叶负责,跑步和跳舞主要由运动皮层和小脑控制(见图 3.2)。一些理论家指出,加德纳的理论只是对智力活动分类的一个基于主观的判断,它缺乏科学证据并忽略了一般智力的观念和作用。

68

当然,正如任何一个做过教师的人都会同意的,有大量经验证据表明,智能有不同的程度和类型。我们遇到的一些特例,例如,明星运动员(高身体/运动知觉智能)几乎写不出一个完整的句子(低言语智能),数学奇才(高逻辑/数学智能)却几乎不与同学交流(低人际交往智能)。课堂观察和研究表明,当教师使用多种设计的教学活动去吸引那些在加德纳所描述的智能中有某一个或几个方面优势的学生时,能够激励更多的学生并使他们在课堂中获得成功(Shearer, 2004)。然而重要的是,要记住这些智能描述的是我们在不同程度上都拥有的,

且能在日常生活中使用的不同类型的能力。

科学家们是否最终会发现构成不同智能的潜在神经网络？这有待观望。与此同时，我认为加加德纳的理论仍然是有益的，原因有两个：首先，它提醒教师，学生有不同的优势和弱点以及不同的兴趣，因而他们应该以不同的方式学习。通过应用加德纳的理论，教师可能会满足更大范围内学生的需要。其次，通过不同方法教授数学课程可能会更有趣，而这本身就能激发学生的学习兴趣。

> 研究表明，学生在那些教师采用了涉及多种智能的活动的课堂上，表现得更加积极并能获得成功。

图 3.6 详细呈现了加德纳(Gardner，1993)描述和修订过的八大智能以及一些相关行为。我没有把加德纳最近提出的一些智能，如灵性智能和情感智能纳



图 3.6 多元智能

这八种智能所描述的是我们在不同程度上都拥有的，且能在日常生活中使用的不同类型的能力(Gardner，1993)。

入这个讨论，因为还没有足够的时间去研究和探索它们的特点和教育意义。我
69 会在第七章给出在数学课上开展涉及这些智能的具体教学活动建议。

10. 考虑教学风格

请快速完成这句话：

“教师更倾向于用他们________的方式教学。”你会说“被教育”？这是一个
70 常见的回答，但不够准确。对学习风格的观察和研究数据表明，教师们实际上倾向于根据自己的学习方式教学。因此，我们的学习风格推动着我们的教学风格。作为听觉优势学习者的教师会在课堂上说得很多，喜欢开展个人讲座，也喜欢聆听他人讲述度假旅行和其他的故事；而作为视觉优势学习者的教师会在课堂上使用大量的图表和形象化教具，并将个人偏爱的看电影、看电视、参观博物馆等活动作为娱乐。实际上，第一个回答中所说的教师用他们的老师教学的方式进行教学是与学习风格间接相关的。如果一名学生（未来的教师）是在一个教师的教学风格与学生的学习风格相匹配的班级，那么学生更有可能获得成功。之后，学生就会非常自如地效仿教师的教学风格，因为它与学生的学习风格是如此匹配。之后，学生就以自己老师的教学方式来教学了。

我可以探究很多其他有关学习方式的组合并讨论它们的特征，但这将占用很多篇幅，而且它并不是本书的目的。相反，我的讨论将转向数学家的思维和学习方式。许多高中数学教师在大学的专业是数学，可能在研究生期间也是数学专业。那么可以这么说，许多这样的教师就像数学家一样思考和学习。

11. 你如何看待数学

如果你是一个数学教育工作者，你会如何看待数学？你是否把数学看成是对人类思维和数学对象的一种抽象建构，与现实没有一点关系？或者，你认为数学对于我们的日常生活是真实和必要的？迪昂（Dehaene，1997）作为一个数学家和认知神经科学方向的研究者，他认为数学家会用以下三种观点中的一种来看待数学学科（见图 3.7）。

- **柏拉图主义者（Platonist）**。对于这些人，数学存在于一个抽象的平面，但他们研究的数学对象就像日常生活一样真实。数学存在于人类意识之外，数学家的作用是探索或观察数学对象。

- **形式主义者**(formalist)。对他们来说,数学只是一个按照精确的形式规则来操纵符号的游戏。数学对象,如数字,与现实没有联系。相反,数学对象被定义为仅仅是一套用以满足特定公理和几何定理的符号。
- **直觉主义者**(intuitionist)。这些人认为数学对象就是人类思维的建构。数学并不存在于现实世界中,而仅仅存在于发明它的数学家的头脑中。毕竟,在人类出现之前,没有算术,没有几何,也没有逻辑的存在。

在读完关于这三种观点的描述后,你把自己归为哪一类?记住,就像你的学习风格引导你的教学风格一样,你对这个学科发自内心的看法也会影响你设计和呈现数学课的方法。

71

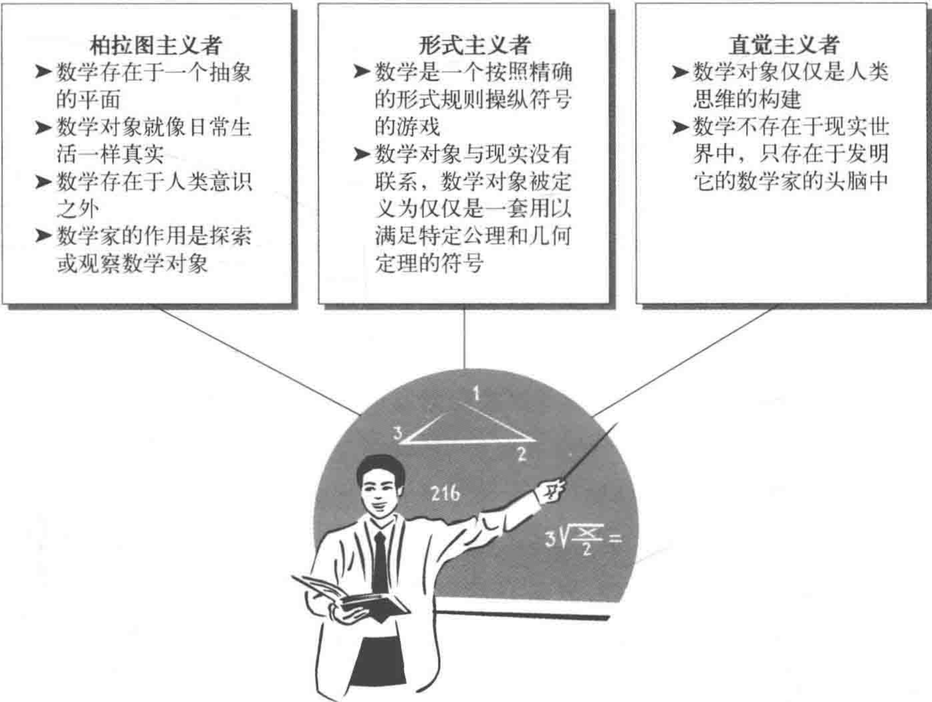


图 3.7　数学家会以三种不同观点中的一种来看待数学

迪昂(Dehaene, 1997)认为数学家会以三种不同观点中的一种来看待数学:柏拉图主义者、形式主义者或直觉主义者。这个图表给每一种观点一个简短的描述。无论教师认同哪一种观点,都会影响其在数学课上呈现知识的方式。

从第一章和第二章呈现的信息来看,直觉主义流派为算术和人脑之间的关系提供了最好的解释。在这些章节中,我们注意到:

- 人类天生就具有确定一小堆物体数量的能力。

- 动物也有数感，且独立于语言，数感在我们物种的发展中有着悠久的历史。
- 在儿童期，数字估计、数量比较、手指数数、简单的加法和减法的能力自发出现，不需要专门指导。
- 对数量的心理操作由位于两个脑半球顶叶区的神经网络执行。

72

因此，对数字的直觉能力深深植根于我们的脑中，它是我们在环境中寻求结构的方式之一。正如特定的脑回路能让我们在空间中找到物体一样，顶叶的回路也能让我们毫不费力地确定数量。

二、下章预告

我们已经了解了学习的主要组成部分，下一步是确定如何适应幼儿园、前青春期和青春期学生的学习需求。在学生的每个发展阶段，对于我们所能教授的数学概念有什么限制？学龄前儿童是否准备好学习数学？青春期前儿童的大脑是否真的已经足够成熟，以学习代数？我们是否已经可以在数学课上挑战青少年？这样做会不会把他们吓跑？这些问题的答案将会出现在接下来的三个章节中。首先，我们从学龄前儿童开始。

73

三、本章反思



在此页简略记下要点、想法、策略和资源，以备日后思考。此页是你的个人日志小结，它能帮助你日后回忆。



第四章　教学龄前儿童学数学

75

> 我建议你质疑你所有的信仰，除了 2 加 2 等于 4。
>
> ——伏尔泰(Voltaire)

我们在第一章和第二章详细讨论了儿童先天能力的发展，如感数、估计、数数以及做简单的计算。大多数儿童到 4 岁时，与环境的互动为他们提供了练习基本数字运算的机会。幼儿园的目的就是为孩子提供在其他地方不能获得的多种学习经验，但这些经验是否应该包括数学呢？4 岁儿童的大脑是否为处理超出他们天赋的数字运算做好准备了呢？我们来看一下。

一、学龄前儿童究竟应不应该学习数学

76

幼儿园应该学数学吗？一些人认为学龄前儿童的大脑还未成熟到能处理数学运算的程度。但像我们在前面几章所解释的那样，人类生来就有处理简单数量的能力，那么学前阶段的数学学习应该利用幼儿先天的数感，这就意味着教学活动不应该只是练习数数和加法，而应该更加深入和广泛。

克莱门茨(Clements，2001)给出了幼儿园应该教好数学的四个理由：

- 学龄前儿童已经接触到了小部分数学的课程领域，补充教学将有助于儿童更好地理解这些领域。
- 很多学龄前儿童，尤其是那些低收入和少数民族家庭的儿童，他们通常会在之后几年的数学学习中遇到困难。这种差距可以通过在学前阶段学习数学而缩小。
- 学龄前儿童通过数物体和画出物体形状掌握了数数和几何能力。儿童在日常生活中都在运用数学思想，并且能发展出相当复杂的数学知识。幼儿园的活动应该扩展这些能力。
- 最近脑研究证实学龄前儿童的大脑经历着重大的发育，他们的学习和经验影响了他们的大脑结构和组织，并且相对于机械技能的学习，他们在从事复杂活动时大脑发育更快。

因为人类大脑拥有如此强大的模式搜寻功能，学龄前儿童会自发地探索形状、测量、数字意义以及数字如何工作等问题。因此，幼儿园的数学活动应该把儿童天生的数感和模式识别能力提升到意识的外显水平。教师不应该认为学龄前儿童对情境、问题或解决方案的感知与成人一样。克莱门茨（Clements，2001）报告了一位研究者是如何让学生数 6 个弹珠的。数完后，研究员把弹珠盖上，另外再拿出一个弹珠，问总共有多少弹珠，学生回答只有 1 个弹珠。当研究者指出他还藏了 6 个时，学龄前的儿童坚定地回答她没看见 6 个。对她来说，除非有物体能数，否则数字就不存在。

> 在幼儿园的数学活动应该把儿童的直觉数感和模式识别能力提升到外显的意识水平。

77 幼儿园的教师需要解读学生在想什么，做什么，并使用这些解读来评价学生学习的概念，并思考如何将所学概念与他们自身的经验联系起来。年幼的学生并不把世界看成是一个个分隔的主题区，他们试图将所有事情联系在一起。他们的游戏通常就是他们第一次与数学的接触，比如说数物体或者画几何图案。

1. 评估学生的数感

幼儿园教师的首要任务之一就是判断每个学生已经达到的数感水平。设计数字知识测验并非简单的任务，研究者莎朗·格里芬（Sharon Griffin）和罗比·凯斯（Robbie Case）解决了这个问题。从 20 世纪 80 年代开始，他们根据自己的研究不断地完善他们的评估，以确保测试题目能反映绝大多数 4、6、8、10 岁儿童的能力（Griffin & Case，1997；Griffin，2002）。

通过测验，教师能了解学生的数感发展水平。然后，教师可以采用不同的活动来培养同龄但处于不同能力水平的学生的数感。表4.1是4岁儿童数字知识测验题目的最新版本，这里经作者许可转载（Griffin，2002）。其他年级的测验题目将在第五章呈现。

表4.1　4岁儿童的数字知识测验

水平0（4岁水平）：如果能正确回答3题及3题以上就转到水平1（见第五章）	
1	（在孩子面前将3个薯片排成一行）你能数出这些薯片并告诉我有多少吗？
2a	（出示两堆薯片，5片和2片，相同颜色）哪一堆薯片更多？
2b	（出示两堆薯片，3片和7片，相同颜色）哪一堆薯片更多？
3a	这次我会问你哪堆更少。（出示两堆薯片，2片和6片，相同颜色）哪堆薯片更少？
3b	（出示两堆薯片，8片和3片，相同颜色）哪一堆薯片更少？
4	我要给你看一些薯片（出示一列3个红的和4个黄的薯片，按顺序：红 黄 红 黄 红 黄 黄）。只数出黄色的薯片，然后告诉我有多少片。
5	从上一题中挑出所有的薯片。然后说：这儿有更多薯片需要数（将7个黄色的和8个红色的薯片混合，随意排列）。只数出红色的薯片，并告诉我有多少片。

来源：Griffin，2002. 经作者许可转载。

2. 学龄前儿童的社会化和情绪化行为

儿童的社会化和情绪化行为将会影响他们学习几乎所有的内容，包括数学能力的发展。最近的一项有关学龄前儿童的研究表明，相比那些有行为障碍、社会化问题和注意问题的学生，具有主动性、自我控制力和爱心的学生，无论男女都能较好地学会数学技能。而且，那些接受干预以解决他们的社会化问题和情绪化问题的学生比没有接受干预的学生，能更好地提高他们的数学技能（Dobbs，Doctoroff，Fisher & Arnold，2006）。

> 有社会化问题和情绪化问题的学生需要先解决这些问题，才可能成功地学习和培养数学技能。

最明显的启示就是，那些存在社会化问题和情感问题的学生需要先解决这些问题，才可能成功地学习和培养数学技能。

78

二、学龄前儿童应该学习哪些数学

NCTM的《课程焦点》(2006)指出，幼儿园儿童应该：

● 发展对整数的理解，包括一一对应、数数、基数和比较的概念；
● 识别形状，描述空间关系；
● 识别可测量的属性，并利用这些属性比较物体。

NCTM 的《课程焦点》(2006)指出，学龄前儿童应该：

● 对整数进行表征、比较和排序，对集合进行组合和拆分；
● 描述形状和空间；
● 利用可测量属性排列物体。

79　更具体地说，早期的幼儿研究者和数学教育家一致认为学龄前儿童和幼儿园儿童应该接触以下领域和技能：

● **数字**。儿童通过数物体和讨论得出的结果来学习数字。“你给了比利 5 张卡片，玛丽需要几张？”儿童会数棋盘游戏上的空格。“你现在在第三格，你需要走多少格才能到第七格？”他们会数到达他们生日的天数。教师可能会问，“昨天距离你的生日还有 9 天，那么现在还有多少天呢？”儿童会读有关数数的书籍，并背诵数字童谣。
● **几何和空间关系**。儿童练习搭建各种形状并讨论它们的属性。他们能看到窄的三角形、宽的三角形和倒三角形，并逐渐意识到它们全都是三角形。
● **测量**。儿童比较积木搭成的塔与椅子桌子的高度。他们衡量其他物体的高度，以及从桌子到墙的距离。他们知道一个木块的高度对于完成一个搭建工程究竟是太短还是太长。
● **模式/几何**。儿童开始意识到他们环境中的模式。他们学习识别珠子、积木和他们衣服的不同颜色和大小。他们通过串珠子和用彩色积木摆设样式来练习产生简单的模式。
● **分析数据**。儿童通过颜色、大小和形状对物体进行分类、数数，并在图表上记录数据。这些图表可能反映了有几株发芽的豌豆苗、宠物的生长期、三月份下雨的天数或一月份出生的儿童人数。

三、学龄前和幼儿园教学的建议

1. 一般准则

数学教育研究者提供了很多建议来指导学前和幼儿园的教学(Clements,

2001)。

√设计有引导性的利于数学探索的学习环境，包括标准单元积木和数学教具。这些都要考虑学生的语言和文化背景，以及他们当前的数学思维和数数策略。

√确定学生的数学思维是正在形成还是停滞不前。如果思维正在形成，你要观察并记录，不要干涉学生，接下来再与这些学生们或全班同学进行讨论，解释其中所涉及的数学知识；如果思维处于停滞期，那么就需要干预以澄清和讨论这些观点。例如，两个学生争论谁的积木更大，可能一个孩子讨论的是高度，另一个看到的是宽度或体积。教师可以利用这个机会来讨论如何以不同的方式衡量物体的大小。

80

√引入一些以数学为基础的活动。例如，数字卡片游戏和用数字方块的数字棋游戏都能给学生提供数数和比较的经验。许多学生用书里有培养分类和排序能力，以及强化学生数字和几何知识的数学主题。

√使用各种教学策略创造有意义的适龄内容，并要求学生积极地参与到学习中。

√通过提出高层次的问题加强学生对数学的思考，如“你有没有试过这种方法呢”“你觉得如果……会发生什么”，以及“我们是否有另一种方式”等。

2. 教授感数的建议

我们在第一章讨论了先天的感数能力，这是一种不需要数数就能知道一小堆物体数量的能力。如果真如看起来那样，感数概念是学习数数的必备技能，那么加强这个技能就能使小学生学习数数更加容易。

建议加强一种与生俱来的能力可能看起来很奇怪，但我们在成长过程中一直是这样做的。人类生来就具有走路和讲话的能力，这些能力通过学习经验的发展得到加强，感数能力的发展也是如此。因此，学前班和幼儿园的教师应该考虑开展强化幼儿这种能力的活动。

在寻找强化感数能力的活动时，教师应该避免使用教具，而使用那些用点表示数字的卡片或物体。为什么呢？因为大脑具备优秀的模式搜寻功能，我们要让学生形成数字模式的心理表象以充分利用这种能力。如果学生使用教具，他们可能会更依赖数数而非心理表象(Kline, 1998)。

81 克莱门茨(Clements,1999)建议,在设计鼓励学龄前儿童掌握感数概念的活动时应该遵循四个准则。用于感数的组合应该是:(1) 独立呈现而不是嵌在图片中;(2) 采用简单的形式,如圆形或方形,而不是动物的图片(可能形成干扰);(3) 强调包括对称的规则排列;(4) 与背景有强烈的反差。下面是一些适用于学前班和幼儿园学生活动的例子:

✓ **卡片上的点阵**。在卡片上画圆形(或在卡片上钻个孔放在投影仪上使用),圆形(或孔)在一些卡片上呈几何形状排列,在其他卡片上随机排列。图4.1 显示了几个例子(Clements, 1999)。

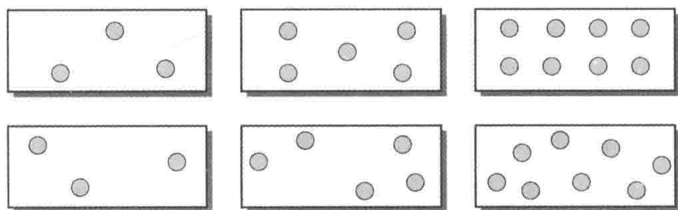


图 4.1 帮助儿童提高感数能力的卡片

像这些卡片,点的排列是随机且有规律的,有助于儿童提高感数能力,可以不需要数数就能确定集合数量。

- 一个活动是展示随机排列的点的卡片,要求学生不要数就说出卡片上有多少个点。
- 另一个活动是玩配对游戏。展示除了一张只有 1 个点的,其他几张有相同数量点的卡片。要求学生不用数就说出哪张卡片与其他不同。
- 选出含有随机排列和规则排列的 0 到 10 个点的一套卡片,给每个学生一套,要求学生在他们面前摊开卡片。说出一个数字,并要求学生尽快地找出与数字匹配的卡片并举起它。另外的几天里,使用不同排列的另一套卡片。
- 展示一张卡片,让学生说出比卡片上的点数多 1 的数字。你可以让他们大声地回答,写下数字,或者举起数字卡片。提醒他们尽量不要数数。
- 82 以各种排列形式把点放在一张大纸上或贴在展板上。指着一种排列,让学生尽快地说出点数。每次玩这个游戏的时候,都要转一下纸或者展板,让它们的方向有所变化。
- 另一个变化的方式是使用投影仪呈现只闪烁 3 秒钟的一个特定模式,目

的是鼓励学生形成心理表象。让他们报告呈现的是几个点，并描述他们所看到的。你可能需要再次闪烁 3 秒钟，以便他们有机会组织心理表象。如果学生能迅速识别，就没有必要呈现第二次了。注意，呈现时间很重要。如果呈现的时间过长，学生会根据图片而不是他们的心理表象估算；呈现的时间太短，他们就没有足够的时间来形成心理表象（Kline, 1998）。

✓ **视觉化**。我们的目标是要看一眼就能立即确定一小组物体的数量，因此感数极度依赖可视化。幼儿的视觉化能力发展迅速，因此，依赖视觉的活动能加强这方面能力的发展，并能使学生在物体的模式和数量之间形成心理联结。

例如，将点以特定几何图形呈现（见图 4.2），有助于学生有目的地将数量和几何联系起来。

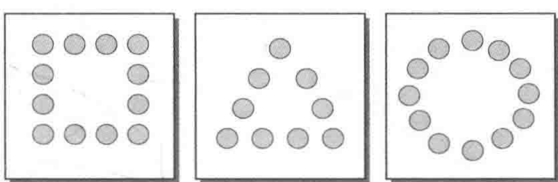


图 4.2　将数量和几何相结合

这些类型的卡片将数量和几何相结合，有利于儿童发展感数概念。

- 视觉素材也有利于帮助年幼的学生通过不同的模式看到同一个数字能以多种方式被分割或分解（见图 4.3）。由此，学生能了解数字是可以被分解成其他数字的，他们也就开始意识到部分与整体的关系。当学生根据部分整体关系解读数字时，他们把数字看成是由其他数字组成的，而这种思维方式是儿童早期学习阶段概念上的重大进步。

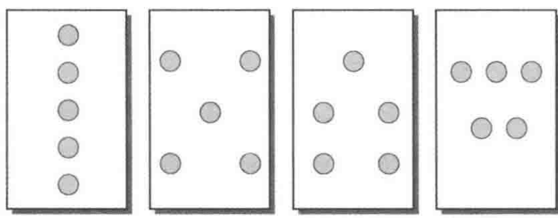


图 4.3　相同数量点的不同排列

呈现相同数量点的不同排列有助于学生意识到同一个数字能以不同的方式被分解或分割（Clements, 1999）。

感数与部分-整体关系的理解

加强感数能帮助4岁儿童理解部分-整体的关系。因此，学龄前和幼儿园的学生应该在各种背景下探讨分解数字的不同方式。如果数字小且活动有意义，部分和整体的观点可以在儿童早期就引入。随着学生能够更好地将数字分解，甚至可以不加思索地又将它们合并，他们就增强了操作小数字的熟练性，这有助于他们以后处理较大的数。

其他两个对于无需数数的量化观念（即感数）至关重要的概念是共变（该概念是指当整体数量中的某一部分增加/减少时，整体数量就会增加/减少）和补偿（是指从某一部分中移除某些项目，并将它们添加到其他部分时，整体数量不变）。研究表明，4岁的儿童就能够给出涉及共变和补偿问题的正确答案。此外，他们能给出恰当的理由来证明他们的答案。这些结果证实了这个观点，即孩子需要经验提醒他们注意到部分和整体的动态关系，以及当改变部分时对整体的影响。理解部分-整体关系对学习数学非常重要，数数是一个有效的工具，但它不一定是发展部分-整体认识的第一步。幼儿教师在帮助学生意识到数字是由其他数字组成的以及如何用部分-整体的关系来解决问题方面具有重要的作用（Young-Loveridge，2002）。

84

通过视觉化可加强感数概念，最终将有助于学生发展加法和减法思维。通过意识到两个苹果加两个苹果等于四个苹果，视觉信息让学生看到了加数与和。一些学生可能会预先数一或两个数，通过说“3，4，5”来解决3+2的问题。数一或两个数强化了学生如何数数的概念。然后，通过发展感数概念，他们能够学习数更大的数。

研究表明，对成人来说，能够感知到的物体最大数量大约是5（Dehaene，1997）。然后，我们不得不利用超出感数的能力来处理数量，数数就变得非常必要。但要记住，那些提高感数能力的练习有助于学生更容易地掌握数数和操作基本运算所需的数字。

听觉输入的感数

增加听觉输入能提高儿童通过感数完成简单计算的能力吗？这个问题的答案是肯定的。这个结论来自哈佛大学的希拉里·巴斯（Hilary Barth）和她同事的研究（Barth，La Mont，Lipton & Spelke，2005）。在这些实验中，那些没有真正

使用数字符号经验的 5 岁儿童能够对两组的点数做加法，并与第三组进行比较。当研究者将第三组的点换成嘟嘟声时，儿童能轻易地将视觉和声音的数量进行整合。儿童能成功地完成这些任务，且不需要实际的数数或使用任何数字符号知识。

为了进一步研究这个能力，哈佛的研究者测试了学龄前儿童对视觉和听觉输入的反应。在第一个测验中，研究者给儿童展示一些蓝色的点，然后将这些点盖住，给他们看红色的点。接着问是红色的点多，还是蓝色的点多。结果是，即使是对于只相差几个点的问题，学龄前儿童都能毫无困难地正确回答。在另一个测验中，儿童必须在视觉上将两组蓝色的点相加，并与第三组中红色点的数量进行比较，他们做这样的题也没有任何问题。然后加入声音。首先，让他们比较点的数量与蜂鸣声的数量。之后，让他们将两组点阵相加，并与一系列蜂鸣声进行比较。令人惊奇的是，儿童在完成点和蜂鸣声的加法时和只有点时一样容易。

在该研究的结论部分，研究人员反思如何将研究结果用于帮助那些在学习基本运算时有困难的儿童。也许在基础教育中，设计新的用以保护儿童已有的算术直觉的教学策略可以促进符号数字和运算的学习。他们提出了两点建议：

第一，如果那些正在与数字符号搏斗的儿童发现他们能成功地完成哈佛实验中的儿童完成的同样的游戏的话，他们可能会得到鼓励和安慰。完成这种游戏表明他们已经具备了完成数学老师在课堂上呈现的那些运算问题所需要的能力。

85

第二，在非符号算术问题中加入符号算术问题有助于帮助儿童掌握符号系统。数字符号和运算符如果与点阵加、减、乘或除的例子——这些是儿童已经从直觉上理解了的内容——相结合的话，或许能减少儿童的混淆。

学会数数

有几种活动有助于儿童学习数数规则。

✓ 通过数轴活动强化基数原理，例如，使用两面为不同颜色的薯片。将薯片相同颜色的一面朝上排开，数到哪片就把哪片薯片翻一面（见图 4.4）。然后把刚刚数过的一组盖住，问学生“你数了多少片”，逐渐延长问这个问题之前的等待时间。你也可以要求学生数放在他们的手上的东西，然后让他们把手背到后

面,问他们“有多少”的问题。变化活动形式,让学生在没有数轴的情况下对不同排列模式的物体数数(Solomon, 2006)。



图4.4 使用两面颜色不同的薯片数数能提高学生理解基数原理的能力

数到哪片就把哪片薯片翻一面,然后把刚刚数过的一组盖住,请学生说出数的是多少。该做法是为了让学生认识到所说出的最后一个数字是组内所有项目的总数。

✓ 学生还需要认识到数字词描述的是物体“有多少”,而不是它们的排列或大小。当学生练习对以不同模式排列的物体(见图 4.5)或不同大小的物体进行数数时,这种概念会被强化。

86

多少鞋子?



多少鞋子?



多少足球?



图 4.5 允许学生以物体不同的排列和大小来练习数数,以强化数字独立于其他物体量的概念。

到 4 岁之前,大多数儿童已经掌握了基本的数数能力,并能在新的情境中运用数数能力。我们尚未完全了解这种能力究竟是如何出现的,它很有可能源于理解环境中小部分物体数量的遗传因素。以一个固定的顺序背诵数字词是我们借助语言的成果,而一一对应的原则实际上也广泛存在于动物王国中。

一旦儿童学会利用物体数数,接下来的任务就是学习不使用物体数而在心里数。进行过增强视觉化练习的儿童可能更容易学会心理数数,因为心理数数

很大程度上依靠图像。下一步就是知道当两个数量相加时，数数可以从一个数量的最后一个数字开始，而不需要从头数一遍。这叫作接着数，是儿童解决加法问题的一种先进的策略。

3. 一种更简单的计数系统

87

在第一章中我们讨论了亚洲儿童学习数数时非常轻松，因为他们的语言有逻辑地描述了数数顺序。一些研究童年早期数学学习的学者认为，可以尝试将该方法用在母语为英语的儿童身上，采用类似亚洲语言的数数模式来数数。在英语中，采用这种方法从 1 数到 100 只需要 10 个不同的词，而不是传统数数方法所需要的 28 个英文单词。

用这种方法，数字说起来虽然并非更短或更快，但合理得多，而且能帮助儿童更深入地理解十进制系统。虽然有人担心这种方法可能会产生混淆，但在北美已经使用这种方法的学校中，还没有出现任何严重混淆的情况。儿童不需要接受来自成人、电视或其他媒介的指导，自己就能学会传统的数词。虽然人们认为用这种方法取代传统方法的建议并非现实可行，但它的使用可能会帮助那些为理解数字系统而苦苦挣扎的学生。表 4.2 显示了在这个更简单的系统中从 1～100 的计数看起来和听起来会是怎样。

> 采用模仿亚洲语言（比如日语和汉语）的方法教数数可能会更容易。这套系统更简单、更有逻辑，并且能让学生更深入地理解十进制系统。

表 4.2　表示数字 1～100 的更具逻辑的计数体系

88

1 one	2 two	3 three	4 four	5 five	6 six	7 seven	8 eight	9 nine	10 ten
11 ten-one	12 ten-two	13 ten-three	14 ten-four	15 ten-five	16 ten-six	17 ten-seven	18 ten-eight	19 ten-nine	20 two-ten
21 two-ten one	22 two-ten two	23 two-ten three	24 two-ten four	25 two-ten five	26 two-ten six	27 two-ten seven	28 two-ten eight	29 two-ten nine	30 three-ten
31 three-ten one	32 three-ten two	33 three-ten three	34 three-ten four	35 three-ten five	36 three-ten six	37 three-ten seven	38 three-ten eight	39 three-ten nine	40 four-ten

续 表

41 four-ten one	42 four-ten two	43 four-ten three	44 four-ten four	45 four-ten five	46 four-ten six	47 four-ten seven	48 four-ten eight	49 four-ten nine	50 five-ten
51 five-ten one	52 five-ten two	53 five-ten three	54 five-ten four	55 five-ten five	56 five-ten six	57 five-ten seven	58 five-ten eight	59 five-ten nine	60 six-ten
61 six-ten one	62 six-ten two	63 six-ten three	64 six-ten four	65 six-ten five	66 six-ten six	67 six-ten seven	68 six-ten eight	69 six-ten nine	70 seven-ten
71 seven-ten one	72 seven-ten two	73 seven-ten three	74 seven-ten four	75 seven-ten five	76 seven-ten six	77 seven-ten seven	78 seven-ten eight	79 seven-ten nine	80 eight-ten
81 eight-ten one	82 eight-ten two	83 eight-ten three	84 eight-ten four	85 eight-ten five	86 eight-ten six	87 eight-ten seven	88 eight-ten eight	89 eight-ten nine	90 nine-ten
91 nine-ten one	92 nine-ten two	93 nine-ten three	94 nine-ten four	95 nine-ten five	96 nine-ten six	97 nine-ten seven	98 nine-ten eight	99 nine-ten nine	100 ten-ten

来源：David A. Sousa, 2008。

4. 教师的日常用语会影响数的知识

一项研究表明，日常用语中使用数字的幼儿园教师能够帮助学生在上学间增加常规数学知识。克里巴诺夫(Klibanoff)和她的同事记录了在随机选择的课堂教学时间段里26个学龄前教师的发言，其中包括教师在组织课堂故事或游戏活动时的用语。尽管在记录时间内教师并不是在呈现计划好的数学活动，但在他们的发言中包括了很多数数甚至是计算的内容。

研究者在学年开始和结束时评估学生的数学技能。那些在教师多次谈到数字的班级的学生相比那些较少接触到数学词汇的学生，在学年结束的时候能力提升更大。而且，这种提高与教师水平、教师所使用的句子结构的复杂性或学生的社会经济地位不相关(Klibanoff, Levine, Huttenlocher, Vasilyeva & Hedges, 2006)。

5. 提问

89

通过提出有关数字的问题并接着开展适当的活动，能够帮助小学生以数学的方式进行思考。一些例子如下（Burns，1998）：

- **“有多少？”**小学生喜欢数数，但他们需要通过练习来学习数字的正确顺序。为了培养对数字意义的理解，他们必须学习一一对应——一个一个地数物体，指着它们按顺序说出数字。学生也必须掌握基数的概念，即序列中最后一个数说明了这里有多少个物体。

活动点子：玩“多少个纽扣”的游戏。要求学生一个一个地走到教室前面，并数出每个学生的衬衣上一共有多少颗纽扣。这是一种介绍“零表示一个都没有”的好方法。

- **“每种有多少？”**当学生思考这个问题的时候，就在无形中培养了他们的归类和数数技能。“有多少？”的问题要求学生数出项目的数量，但必须首先对项目进行归类，以确定“每一种”。学生学习到不同类型的东西分别属于不同的类别。

  活动点子：在课堂上提供多种物体的集合，如钮扣、蜡笔、木块、记号笔和珠子，让学生归类并数数。

- **“这些物体有什么相同或不同？”**为了回答这个问题，学生就要观察两种类型物体，识别他们有什么相同或不同之处。回答这个问题要求学生观察、比较、分析，然后得出结论，需要基本的数学技能和科学探索。

  活动点子：让学生围成一圈，并让每个学生拿出一只鞋。拿起两只鞋子并问“这些有什么相同之处吗”，让学生交流他们的想法。然后问：“它们如何不同呢？”

- **“哪个更多或更少？”**数量比较是学生以后学习减法奠定基础的关键。

  活动点子：玩“投硬币”。给学生奇数数量的硬币让他们投掷，如从5个或7个开始。问：“哪种更多？正面的多还是反面的多？”这个活动也有利于帮助学生熟悉硬币。

- **“哪个更高、更长或更矮？”**小学生更愿意通过直接比较和匹配物体看哪个更高、更长或更矮来比较长度。当可能做不到时，比如让他们比较房间两端的桌子哪个更长时，学生可以使用各种非标准的测量工具或方法（回形

90

针、铅笔和步测)。直接比较和使用非标准的工具测量都有助于为学生学习标准单位如英寸、厘米和尺做准备。

活动点子：从彩带篮子里选一条长的彩带，要求学生根据比这条带子长或短的标准对篮子里的其他彩带进行归类。

6. 培养归类和分类技能

儿童使用归类和分类技能帮助他们组织周围的世界。这两种技能萌芽于3岁左右，是孩子理解真实世界所必需的。随着这些技能的发展，儿童开始意识到植物和动物，白天和黑夜，以及不同几何形状之间的差别。他们提高了数感和对于如何在数学运算中操作数字的直觉理解。于是，他们开始使用逻辑思维解决所遇到的数学概念问题。普拉茨(Platz，2004)提出如下关于如何教授儿童归类和分类技能的建议。

> 教儿童学习归类和分类技能可以增强他们的数感，并提高他们对如何操作数字的直觉理解。

归类与分类。归类和分类通常被认为是同义词，但实际上呈现的是逻辑思维的两种不同水平。归类是掌握任务最开始的技能，即告知学生如何将物体归类："给我所有的绿色木块。"而分类是要求学生去发现如何对给定的对象进行分组："看这些不同的木块，告诉我你如何将他们分组。"不像归类任务，分类任务并不告诉学生应该基于哪种特定的属性将物体分组。对于分类任务，学生必须决定如何让各组中的物体尽可能地相似。

✓ 当为儿童的归类和分类任务选择活动时，请考虑如下关键因素。

- 年龄。对于3岁儿童来说是考验的任务对于4岁儿童来说可能就不具有挑战性了。给年龄更小的学生尽可能安排更简单的实物归类任务，如展示水果，他们的任务是找到一组物体中所有跟展示物体相像的物体。针对大一点的学生，可以使用一套不同特征的积木，要求学生把不同特征的积木分成几组，使每组的积木组合形式相同。
- 知觉。如何看待事物是学生了解周围环境的基础。随着他们进行归类和分类，看起来相似的物体可能被视为相同。因此，对于儿童来说首先利用在外观上不同的物体更有帮助。
- 构建信息。由于儿童经验有限，他们构建信息的方式与成人不同。成人

可能期望儿童按照三角形和圆形归类或分类物体，但学生实际上是按照能否滚动对物体进行分组的。学生看到的类别或分组常常是成人所意想不到的。

- 触觉和动觉任务。在儿童学习数字之前，真实物体的触觉或动觉任务会使有关物体数量的信号直接发送到大脑。这对于学习归类和分类的数学概念具有极其重要的意义。
- 物体的数量。如果分类物体数量太多的话，3 岁的学生很可能无法进行归类和分类。当进行归类和分类任务时，一般从 4～5 个物体开始，随后增加到 6～8 个物体应该就足够了。
- 数学的交谈。当学生对物体进行归类和分类时，他们应该大声交流他们是如何考虑的。我们知道，与任务相关的交流对于学习数学词汇非常重要。给学生提供机会，让他们互相交流进行的活动，将有助于理解数学术语和短语的概念。
- 使它更有乐趣，并给学生提供选择。通过个体游戏和小组活动，给学生提供各种使用有趣的方法进行归类和分类的机会，让他们在进行这些活动时可以健康地学习。

归类的水平。归类任务是促进学生理解分组概念的良好启蒙活动。教师的责任是给学生提供各种物体，并让他们确定如何进行分组。例如，教师可以给学生展示五个不同的水果，让学生挑出所有红色的苹果。在归类时，通过增加要归类的物体的数量，要求学生考虑更多的属性，以及给出口头线索而不是视觉线索等方法，以增加任务的难度。普拉茨（Platz，2004）提出如下从简单到复杂的归类任务的四个水平（见图 4.6）。

√水平 1：一种不同的属性。刚开始给学生 4～5 个只包含一个不同属性的物体。例如，可以给学生具有相同颜色或大小的不同形状的物体，要求指出所有跟展示的物体形状相同的物体，比如正方形，学生仅需要按照形状归类即可。在这个基础上，给学生展示物体，并让学生把所有相似的物体放到一个容器里（或相同的空间里）。

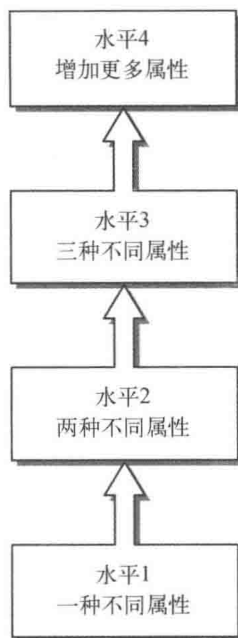


图 4.6　学龄前儿童归类任务的四种水平（Platz，2004）

92 学生学习了形状后，要求他们给出正方形——用口头线索代替视觉线索，学生也需要解释他们为什么选出这些物体。交流有助于教师深入了解学生选择这些物体的理由，并帮助学生弄清对任务的理解。当他们完成水平1之后，物体的数量就会从5增加到8。

√水平2：两种不同属性。给学生提供6～8个不同颜色、不同形状的物体。给学生展示具有两种属性的物体，如红色的圆，让学生给出与这个例子相似的所有物体。在所给出的一堆物体中包含有不同的形状和颜色，选择所有红色圆的学生是按照两个属性进行分类的。接着给学生提供机会，让他们说出是如何进行归类的。你也可以依据学生的成功率增加更多的物体。

√水平3：三种不同的属性。下一步就是把物体按照三种不同的属性分类：颜色、大小和形状。展示一个大的绿色的正方形，让学生给出所有与这个例子相似的物体。确保材料堆里包含三种不同属性的形状物体。

√水平4：增加更多的属性。在学生成功归类后再加另一个属性，如厚度。另一个任务可能是基于某种功能的分类，如汤勺、叉子、刀子。给出一组包含吃饭时用的和不是吃饭时用的物体，让学生给出他们吃饭时可能使用的物体。在按功能分类时，要求学生解释为什么他们选择把这些物体归为一组。

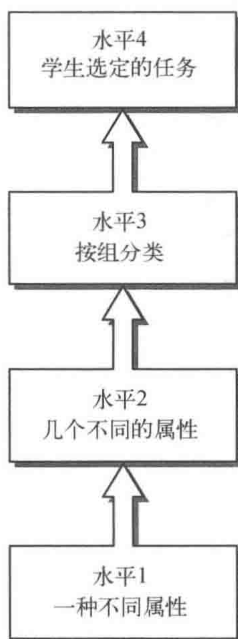


图 4.7 学龄前儿童分类任务的四种水平

分类的水平。随着学生完成归类任务时日渐熟练，教师可以介绍分类任务，但不告诉学生如何分类。当要求学93生按照他们的想法对物体进行分类时，教师也要让他们解释这样分类的理由。不同颜色、大小和形状的基本属性有助于培养分类任务的四种策略水平（见图4.7）（Platz，2004）。

√水平1：一种不同属性。最初的分类任务遵循归类任务中所使用的相似策略。开始是只有一个不同属性的4～5个物体。例如，物体有相同的颜色和大小，但有不同的形状。让学生把物体放在不同的组里，使同组的物体在某种形式上相似。如果学生没有按照形状分类，教师就会把物体放回一个堆里，请学生用另一种方式分类。学生对物体进行分类的任何合理的解释都是可以接受的。当学

生通过水平 1 后，教师再增加更多的物体。

✓水平 2：几种不同的属性。第二个阶段是给学生有几个不同属性的一组物体，让他们用几种方式进行分组。例如，给出的物体有不同的颜色、大小和形状，学生可以首先按颜色进行分类，然后把相同大小和形状的放在一组。通常，小学生首先看到的是颜色和形状这两个属性，然后才是大小的属性。这里也要求学生解释为什么把这些物体放到某一组，这让你能够洞察学生的思维，并获得在有必要的情况下进一步引导的机会。

✓水平 3：按组分类。在这个水平让学生按照这样一种方式进行分类，即，将物体分成特定数量的组。例如，一堆物体里可能包括三种不同颜色、两种不同形状和两种不同大小的物体。要求学生把物体分成三个不同的组，使每组中的物体在某种形式上相似。那些可以完成水平 2 的 4 岁和 5 岁的儿童在开始时很难完成水平 3 的任务，该水平的目的在于让学生有逻辑地思考一堆物体各种可能的分类方法，并推导出一种最合适的方法以满足组别数量的要求。

✓水平 4：学生选定的任务。除了在水平 1～水平 3 由教师指导的任务外，创造机会进行学生—教师以及学生—学生的分类任务。学生可以根据他们心里所想的系统，为教师或其他学生选择一组物体进行分类。这样的角色转换为学生提供了理解分类的另一种水平的机会。通过为他人设定任务，学生以一种新的方式进行分类思考，这能增进他们对分类的理解并使他们的理解更加清晰。

94

通过使用归类和分类任务，教师帮助学生发展在分组和重组方面的思维，这对于学生学习数学运算知识非常重要。通过按照一定的顺序来选择和完成任务，学生将有机会扩展他们对新情境的思考方式，从而帮助他们组织新的信息。

四、下章预告

我们已就学龄前以及幼儿园学生的一些基本的数学活动做了说明。重点在于评估数感，帮助学生学习数数，以及发展归类和分类技能。随着大脑的快速发育和发展，学生从小学到中学将会面临更多的困难和更复杂的挑战。下一章我们将探讨小学和初中教师在设计数学课程时应该考虑的内容和策略。

95 ## 五、本章反思



在此页简略记下要点、想法、策略和资源，以备日后思考。此页是你的个人日志小结，它能帮助你日后回忆。



第五章　教前青春期的学生学数学

与算术背道而驰的种种：野心、分心、丑化和愚弄。

——刘易斯·卡罗尔(Lewis Carroll),《爱丽丝漫游仙境》

一、什么是前青春期的大脑

究竟什么是前青春期的大脑？教师和家长为获得这个问题的答案伤透了脑筋。有很多观点都围绕着前青春期阶段大脑发育过程中内外部作用力的影响而展开。如今，神经科学通过脑成像技术所获得的证据提供了大量信息，也许能够更清楚地揭示前青春期大脑的秘密。让我们来看看自然(遗传因素)和养育(环境影响)是如何相互作用，共同塑造前青春期学生的思维的。据此，我们将前青春期的学生定位于6～12岁的学生。

1. 自然如何影响成长中的大脑

人类生来就具有某些能力，用来帮助人在从婴儿到成人的漫长旅程中得以生存。我们的口语、数量表征和社会联结能力的遗传特征，使我们能够发展生存必备的技能，从而成为家庭中有贡献的一员。大脑引导着这些行动，并且随着大脑的生长和发育产生新的能力。但是，大脑的发育是非线性的，它不是匀速发展的，

并且不同脑区的发育速度也不同。大脑的某些部分已经发育完全，可以行使功能，而另一部分才刚刚开始组建神经网络，这种现象随时可能出现。因此，早期学习在很大程度上取决于那些负责认知、运动和情绪技能的脑区的发育成熟程度。

灰质和白质

毫无疑问，你已经接触到了一些有关大脑灰质和白质的介绍。但它们到底是什么？灰质（见图5.1）是一种1/10英寸厚的覆盖大脑的六层组织（也称为大脑皮层），主要由神经元的胞体及其支持细胞组成。之所以如此命名，是因为它在大脑里呈现为灰色。灰质包括负责感官知觉的脑区，如视觉和听觉、肌肉控制、言语、数量和情绪。思考、创造和问题解决大多在这个皮层进行。

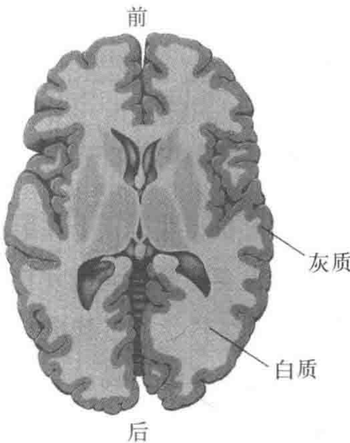


图5.1 大脑的水平切面

灰质主要由神经元组成，而其下方的白质主要由髓鞘组成。

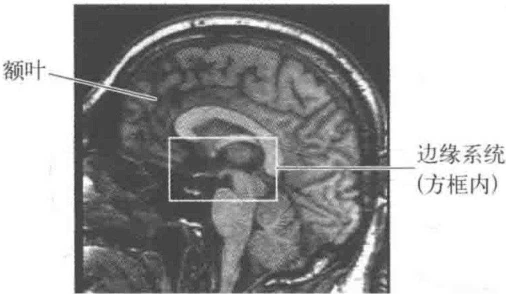


图5.2 边缘系统与额叶

情绪反应产生于边缘系统。额叶的功能之一是调节这些反应的强度。

白质在灰质下方。在保存的组织里看上去比灰质亮些，这是因为髓鞘的缘故。那些乳白色的脂肪类物质，包裹着每个神经元用来传导信息的叫作轴突的分支。神经轴突与一组复杂的神经网络相连接，负责在身体的其他部分和大脑皮层间来回传递信息。这些网络也与调节诸如血压、心跳和人体温度等人体自主（无意识）功能的系统相互作用。在边缘系统（见图5.2）的某些神经元负责情绪的表达、激素的释放以及食物和水摄入的调节。

大脑扫描所显示的结果。一项对年龄为4～21岁的实验对象的追踪脑成像扫描研究揭示了一些有关前青春期大脑各部分是如何发育的有趣线索。这些结果对于从事前青春期学生相关工作的人来说可能并没有太多惊喜，但是让人感兴趣的是能够看到大脑发育的研究是如何解释这些孩子的学习和行为的。表5.1列出了对于前青春期学生脑成像的主要发现，并附上我个人关于这些发现对学习和教学可能的影响的一些想法（Gogtay et al.，2004）。有关青春期大脑的发现将在下一章讨论。

99

表5.1　有关前青春期大脑的发育及其影响

研究发现	对数学学习的可能影响
随着大脑尺寸的增长，灰质和白质的容量从儿童期至青春期阶段都保持持续增长	孩子在小学中年级时能够应付那些难度不断加大的问题。并不存在某些人依旧认为的在中年级出现的所谓"学习间断期"
在青春期，当大脑已经基本与成人脑大小相同时，灰质容量开始变小，因为修剪掉了那些不需要的和不健康的神经元	到了六年级，问题解决应该开始变得容易了，这包括出现了更多的备选方案，并且表现出思维复杂性的增强
部分脑区与早期的基本能力成熟有关。运动和感觉功能（味觉、嗅觉和视觉）首先成熟，然后是与空间定位、言语和语言发展，以及与注意有关的脑区	低年级儿童在解决视觉空间问题时可能会遇到一些困难。在低年级阶段，男孩在解决此类型问题时可能会比女孩做得好，但是到了中年级，差距开始缩小。运用多感觉通道的方法似乎会有效
较晚成熟的是有关执行功能（创造性、问题解决、反思、分析）、注意和运动协调的脑区（额叶）	这些技能在中年级才开始产生，因此，运用多步骤解决问题，或者有多种答案的问题对儿童而言都具有挑战性，但他们能够做到
颞叶的大部分区域成熟较早。这些脑区主要参与听觉加工。最后成熟的是颞叶中很小的一块参与记忆整合、视听联合和认识物体的区域	由于听觉脑区正在快速发育成熟，因此大声朗读题目可能会有帮助。三维旋转和操作对于中年级学生可能会有困难

来源：Gogtay et al.，2004。

情绪化与理性行为

100

边缘系统位于大脑的深处，它与情绪反应的产生有很大的关系。由于情绪可能会失控，额叶的功能之一就是评估和控制由边缘系统（图5.2）产生的情绪类型和强度。但对于前青春期的孩子来说，很难保持平衡。除了其他因素之外，人类生存所依赖的因素之一是家庭单元，在家里，情绪的纽带增加了生育孩子和抚养他们成长为有创造力的人的概率。经过数千年的学习，人类大脑已经知道，

在过滤机体获取的所有信号时，生存和情绪信息具有高度优先权。所以这就不难解释为什么有关人类大脑生长的研究发现，情绪（和更早开始发育的）系统比额叶发育要快，而且成熟时间要早得多（Paus，2005；Steinberg，2005）。图 5.3 显示的是从出生到 24 岁，大脑边缘系统和额叶发育的百分比。边缘系统在 10～12 岁时就已完全发育成熟，而额叶的成熟要到 22～24 岁。因此，在前青春期阶段，情绪系统在与行为控制的这场拔河比赛中更有可能获胜。

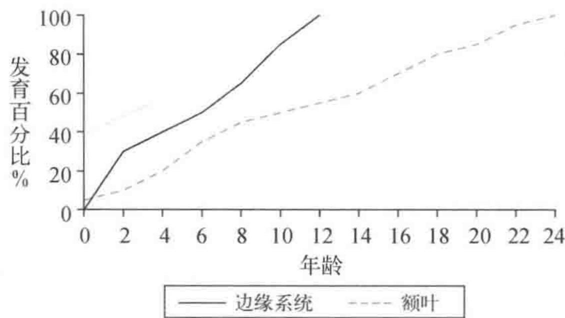


图 5.3　大脑边缘系统与额叶的发育

根据最近的研究，此表显示了大脑边缘系统与额叶可能的发展程度（Paus，2005；Steinberg，2005）。

这些结果对于课堂中的前青春期学生有什么意义呢？情绪信息引导着个体行为，包括将注意力导向学习环境。具体来说，是情绪驱动注意，而注意又推动学习。更重要的是，要理解情绪注意的发生比认知上的意识要早。例如，你在花园里看到一条蛇，仅在几秒钟内，你的手掌就开始出汗，你的呼吸加重，血压上升——这些甚至都发生在你还不知道蛇是否是活的之前。这就是你的边缘系统在未得到大脑的认知部分（额叶）的任何输入之前采取行动的结果。这样，大脑在未获得诸如思考、推理和意识等认知功能的帮助之前就对可能威胁生命的情境产生了情绪性的反应（Damasio，2003）。

101

前青春期学生对学习环境的情绪性反应很可能比理性反应要快得多。要将他们的注意吸引到数学课上，意味着需要努力为他们当天的学习目标找到一条情绪纽带。例如，“今天我们将要学习分数”这样的方式作为上课的开场白，不如用问他们是想要 1/3 个、1/4 个还是 1/6 个派的方式更能吸引他们的注意力。无论何时，当教师在数学课上传达一种积极的情绪时，不仅意味着吸引注意，还意味着能够帮助学生看到数学在真实生活中的应用。

2. 环境对年轻大脑的影响

人类能够成为胜利物种，部分归功于大脑对新异事物始终保持兴趣，即对环境中发生的变化的兴趣。大脑不断地对其所处环境进行扫描以寻求新鲜刺激。当发现出乎意料的刺激时——比如在一间空屋子里的巨大噪音——肾上腺素的分泌将停止所有不必要的行动并将大脑的注意力迅速集中，以便立即行动。然而，一个充满可预见的或者重复的刺激的环境（比如在一些课堂上），将降低脑对外部世界的兴趣，并诱使其搜寻具有新异性的事物。

我们经常听到教师们说如今孩子学习的方式跟以前有多么的不同，他们的注意广度似乎更窄并且很容易感到厌烦。这说明什么？在这些学习者身边是否发生了什么事情改变了他们学习的方式？让我们看看表 5.2，总结一下如今前青春期学生们的大脑所面对的种种环境，和我个人认为可能对于学习的一些启示。值得注意的是，当今学生是沉浸在多媒体环境中，又是适应多任务操作的，他们想要参与到学习过程中。当学生表现出对一个内容不感兴趣时，可能是因为课程几乎完全是由教师指导的，没有提供给学生主动参与的机会。另外，也可能是因为他们没有看到所学事物的意义。

> 如今的学生沉浸在多媒体世界中，他们适应多任务操作，并且想参与到学习过程中。

表 5.2　前青春期学生所处环境及其影响

102

环境因素	对于学习的可能影响
如今的家庭单元不再像以前那样稳定。单亲家庭越来越普遍，而孩子少有机会跟抚养他们的成人交谈。由于在家烹饪机会的减少，他们的饮食习惯也发生着变化	更多的少年到学校首先是寻求情绪需求的满足，然后才能专注于课程内容。同时，许多人因为没吃早餐而血糖低。你需要保证他们都吃了早餐并且让他们感觉到你是真的在乎他们的成功
他们被媒体包围着：手机、电影、计算机、视频游戏、e-mail 还有互联网络。他们一周看电视的时间有 17 个小时	媒体是他们学习经验的一部分。由于它极具互动性，今天的学生想要参与到他们的学习过程中。因此，在课堂上尽量使用媒体技术，让他们主动参与其中
他们可以从学校之外的多种资源中获取信息	学生们在学校以外接触大量的信息，因此，他们带来了许多关于数字、集合和问题解决的先验观点。你需要确定他们已经知道了哪些，他们的兴趣点在哪里，并用那些信息来激发动机

续 表

环 境 因 素	对于学习的可能影响
学生已经习惯于处在这种信息丰富并且快速交换的环境中。这将分散他们的注意力，因此他们试着同时注意好几件事物，但是他们很少深度投入某件事	多任务操作并不会缩减孩子们的注意广度，却让他们更难对一个概念保持足够长的专注时间以深入探讨。通过提供不同的解题方法，我们迫使他们在寻找不同方法时，投入更多的时间来分析问题
他们花更长的时间在室内跟高科技产品待在一起，这样就少了很多可以发展他们的动作技能和交流与沟通所必需的社会化技能的户外活动机会	寻找能够在户外呈现和解决问题的机会，或者找一个更大的室内空间，比如体操馆。运动和更多的社会交往将促进长时记忆，并使他们对课程产生兴趣
为了应对技术，年轻的大脑通过改变它们的功能和组织来适应环境中发生的大量刺激。通过对这种变化的适应，大脑对于独特的、不同的或新异事物的反应比以往任何时候都多	安排一些出乎意料的事情是一种新奇的形式。每天，孩子们对于老师将如何教授课程都会有相当准确的预期。当你打破这种预期时，你就创造了新奇事物。想一想，你可以用多少方法来介绍多边形的不同类型

103 在第一章和第二章，我们看到，人类生来具有数感，这使人们能够不用数数就能估计少量的物体数目（感数），能够借助手指一一对应的操作在十进制的基础上理解基本的数字规则。人的大脑是一个优秀的模式识别器，能够在人遇到的任何事物中寻找意义。学习的环境是将支持还是会阻止这种先天能力的发展？当孩子开始他们正式的学校生活时，他们将会发现，关于数字的操作还有更多需要学习的东西。教师如何将数字引入低年级学生的学习，将会影响学生以后对于数学的看法。我们要坚持让他们专注于记住那些符号，而不是去理解那些符号所代表的数的意义吗？我们会以实质上无意义的方式向他们演示如何进行符号性的程序操作，比如如何将两个分数相加吗？

由于人类大脑有着极佳的适应能力，因此它能够在分数相加的过程中，被引导学会操作符号的程序。最后，大多数在校学生都能在根本不了解他们行为意义的情况下掌握这一系列的行动，从而在数学测验中获得好成绩。许多聪明的成人并不会对分数做加法，尽管他们在上学的时候是会的。这是怎么回事？如果他们在学习加法的过程中能够真正理解这个过程，他们应该永远不会忘记。然而，它们在工作记忆中保存的时间只够在完成测验时提取这些机械性的程序。在那以后，这些信息就会从工作记忆中抹去，因为它们没有意义。

3. 为意义而教

我们在第三章已经解释了用对学生有意义的方式教授数学的重要性。要认识到意义是进入长时存储的一个标准，各年级的教师都应该有目的地将意义纳入课程计划。我们也认识到，阶段性小结是帮助学生赋予所学新知识以意义的有效策略。下面提供两个基本的观点，并结合例子讲述如何使用样例（Dehaene, 1997）和小结（Sousa, 2006）的方法来教授有意义的数学。

使用样例教学

✓**使用多种样例**。计算和数学知识应该首先建立在具体情境中而不是从抽象概念开始。数字表征帮助学生形成有关计算的心理模型并与他们**天生的数感相连接**。例如，一个简单的减法问题 8－3＝5，能够以不同的方式联系具体情境呈现。它能以一堆物体的样式展现：一个盒子里有 8 个玩具，拿走 3 个，还剩 5 个。也可以运用到温度计模式上：如果室外只有 8 度，然后又降了 3 度，那么温度将会是 5 度。距离模式也是一种选择：在棋盘游戏中，一个棋子从第 3 格跳到第 8 格需要移动 5 格。尽管这些例子对成年人来说似乎都一样，但对于那些需要发现原来减法就是适用于上述所有例子的计算过程的年幼学生来说，则是新鲜的。 104

使用不同样例是很重要的，因为仅仅靠一种样例是不够的。比如说，假设你要引入负数的概念，然后你要求全班学生计算 3－8。只靠物体数量模式学习的学生会说，这个运算是不合逻辑的并且是不可能的，因为你没办法从 3 个玩具中拿走 8 个。但这个问题对于使用温度计模式的学生来说则是符合逻辑的，因为大多数学生都能理解零下温度的概念。

✓ **选择正确的样例**。孩子在学校学习分数之前，在实际生活中早就接触到了分数。他们有一些实际经验，比如说分派或分蛋糕。当第一次遇到诸如 1/2 加 1/3 的分数加法问题时，他们能够将这些数字跟他们关于派的等份的直觉概念相联系。他们可能很快认识到这两个部分加在一起将小于 1。然而，那些对分数没有直观理解的孩子则很可能简单地把分子和分母直接相加，从而得到错误的结果：1/2＋1/3＝2/5。

这个结果并不像看上去那么匪夷所思，因为它在实际生活中有具体的意义。

当一个棒球手在一局比赛中两击一中，那么他的成绩就是 1/2。在他的下一局比赛中如果三击一中，那么他的成绩是 1/3。所以两局比赛他的总成绩就是五击两中，或 2/5。在这样的情况下，1/2 加 1/3 就等于 2/5。你将如何解释这种表面上存在的冲突？在教授分数时，重要的是让学生明确他们应该在头脑中使用“派的等份”的样例，而不是“平均分数”的样例。

4. 使用认知性的小结来记住意义

小结在课程中并不意味着打包或是要转换其他话题，它更像是一种认知活动，可以帮助学生聚焦于已经学过的知识并思考它们的意义。赋予学习材料以意义将显著增加记住所学内容的概率，而记住这些意义则意味着所学知识在未来新的情境中被使用的可能性增大。

105

✓ 帮助学生记住所学知识意义的一种方法是，每节课后将所学的新知识写到日志里。重要的是，写下这些问题的答案：

- **我们今天学了什么？** 这个问题可以保证让学生梳理他们所学的内容。
- **我们今天所学的跟我们过去的知识如何联系？** 这个问题将增大新内容与记忆中相似或相关概念联系的可能性，从而能更容易在日后回忆。
- **我们今天所学的对于我们今后的学习有什么帮助？** 这个问题直达意义的核心。人类大脑倾向于存储那些对将来有用的信息。

这个写作任务仅耗时几分钟（取决于学生的年龄），使用事先打印好格式的日志将会帮助年幼的学生加快完成这个任务。图 5.4 给出了如何组织这种事先打印好的记录的建议，并给出了学生写的样例。

> 今天的课程：乘法交换率
> 1. **今天学的：** 改变相乘数字的顺序，答案不变。所以 3×6×7 等于 7×3×6。这就是交换率。
> 2. **与已有知识的联系或补充：** 我们学过的加法也一样有交换率，3+6+7 等于 7+3+6。
> 3. **我今天所学的对于今后的帮助：** 我能够改变长式子里的数字顺序，以便能更快地相加或相乘。

图 5.4 帮助学生记住课堂所学知识意义的日志输入表样例

当学生们理解了数学究竟是什么时，当符号对于他们变得有意义，成为一个获得计算答案的工具而不仅仅是符号时，数学就变得容易了。那些看不到计算中的意义的人，往往就是那些说自己数学不好的人。

二、我们应该教什么

小学和中学教师曾经向我表达他们的担心，各个年级的数学课上都有太多的知识点，没有足够的时间全部讲解。在有些情况下，重要的内容没有足够的时间讲，而一些不太重要的内容却在各个年级不断重复。就像我们都听到过的所谓"英里宽英寸厚的课程"。尽管各年级标准分布很广，每个年级仍然缺乏针对特定内容的聚焦，这种聚焦将有助于学生数学能力的逐步发展并与个人的认知发展水平相匹配。

106

我们在此提出的建议是由安斯沃斯和克里斯廷森（Ainsworth & Christinson，2000）提出来的。在与加州教师合作的过程中，他们赞同，从学前班到七年级，每个年级应该聚焦一个重大主题并进行深度教学。他们依据的原理是，如果学生在所在年级对某一个重大主题有了深入的理解，那么在下一年级他们将不再重复学习同样的内容，而是在理解的基础上进一步学习。正如我们前面所讨论的，他们的方法与认知神经科学的观点相一致，即深入的学习产生意义，从而增加了概念被记住的可能性，并借此构筑坚实的数学能力的框架。

他们建议的适用于各个年级水平的重大主题如下：

- 学前班　　数感
- 一年级　　数感和加法
- 二年级　　减法
- 三年级　　乘法
- 四年级　　除法
- 五年级　　分数
- 六年级　　分数、小数和百分数
- 七年级　　比率和比例

当然，重大主题并非那个年级唯一讲授的概念，但它应该代表教学的主要聚焦点。八年级的内容未包含其中，因为八年级的聚焦点已被认定是代数。这看起来与 NCTM 数学实践与标准（2000）和许多州立数学课程框架是一致的。

三、教授程序性技能

理解如何操作数字、发现和分析模式、解决问题，如何将数学知识运用于真实世界，都需要掌握一定的程序性技能。NCTM 的《学校数学教学原则与标准》(NCTM，2000)中包含了 10 个标准，其中 5 个是内容标准，另 5 个是程序标准。这些程序标准包括：(1) 问题解决；(2) 推理和验证；(3) 沟通；(4) 联系；(5) 呈现。

107

认知神经科学研究在某种程度上揭示的与这些过程标准有关的三个内容是数感、估算(感数的副产品)和推理。为青春期前的学生设计和呈现课程时，试着回答如下有关此类技能的问题。

1. 所教的课程会增强数感吗

第一章已经深入剖析了我们称之为数感的这种天生感知数量的能力，特别是其对于儿童早期认知发展的作用。我们已经注意到，认知神经科学家将数感视为一种有生物基础的天生能力，仅限于简单的对于量的直觉，包括对于小数量快速精确感知(感数)的能力、数数的能力、比较数量和理解简单运算的能力。

正如我们在第二章所讨论的，对于数感，数学教育者有着比认知神经科学家更为宽广的视野。由于数感并不局限于低年级，所有年级的数学教师都应该明确在每节课上需要强调哪些数感。

评估学生的数感

教师设计开发学生数感的课程时，重要的是要知道每个学生已经达到的数感水平。我们在第四章中提到，设计评估数字知识的测验并非一件容易的事，但是研究者莎朗·格里芬和罗比·凯斯在 20 世纪 80 年代就开始探讨这个问题。在进行了 20 余年的测验之后，他们根据研究结果进行了提炼，以保证题目能够反映每个年龄段大多数学生所拥有的能力(Griffin & Case，1997；Griffin，2002)。

> 当教师准备开发学生数感的课程时，他们应该确定每个学生已经达到的数感水平。

通过进行这些测验，教师能够确定学生从 4 岁、6 岁、8 岁到 10 岁时的数感

发展水平。然后教师就可以对同龄但可能能力水平不同的学生采用不同的活动来发展数感。表 5.3 显示了 6 岁、8 岁和 10 岁儿童适用的测验版本，这里经作者许可转载(Griffin, 2002)。4 岁儿童适用的测试请见第四章。 108

表 5.3　6 岁、8 岁、10 岁儿童适用的数字知识测验

水平 1(6 岁水平)：如果答对 5 题以上，请转到水平 2	
1	如果你有 4 块巧克力，有人又给了你 3 块，请问你一共会有多少块巧克力?
2	紧接在 7 后面的是什么数?
3	7 往后 2 个数是几?
4a	哪个更大，5 还是 4?
4b	哪个更大，7 还是 9?
5a	现在，我要问你关于数的比较问题。哪个更小，8 还是 6?
5b	哪个更小，5 还是 7?
6a	哪个数更接近 5，6 还是 2?（问完后呈现视觉数列）
6b	哪个数更接近 7，4 还是 9?（问完后呈现视觉数列）
7	2+4 是多少?（可以数指头）
8	从 8 里拿掉 6 剩多少?（可以数指头）
9a	（呈现视觉数列 8 5 2 6，并请学生逐个指认命名）。当你数数时，这些数里你最先说到的是哪个数字?
9b	当你数数时，这些数里你最后说到的是哪个数字?
水平 2 (8 岁水平)：如果答对 5 题以上，请转到水平 3	
1	49 往后 5 个数是几?
2	60 往前 4 个数是几?
3a	哪个大，69 还是 71?
3b	哪个大，32 还是 28?
4a	现在，我要问你关于数的比较问题。哪个更小，27 还是 32?
4b	哪个更小，51 还是 39?
5a	哪个数更接近 21，25 还是 18?（问完后呈现视觉数列）
5b	哪个数更接近 28，31 还是 24?（问完后呈现视觉数列）
6	2 和 6 之间有几个数字?（3 或 4 都对）
7	7 和 9 之间有几个数字?（1 或 2 都对）
8	（展示卡片：12，54）12+54 是多少?
9	（展示卡片：47，21）从 47 里拿走 21 是多少?

续 表

水平 3(10 岁水平)	
1	99 后面 10 个数是多少?
2	999 后面 9 个数是多少?
3a	哪个相差更大,9 与 6 之间的差距还是 8 和 3 之间的差距?
3b	哪个相差更大,6 与 2 之间的差距还是 8 和 5 之间的差距?
4a	哪个相差更小,99 与 92 之间的差距还是 25 和 11 之间的差距?
4b	哪个相差更小,48 与 36 之间的差距还是 84 和 73 之间的差距?
5	(展示卡片:13,39)13+39 是多少?
6	(展示卡片:36,18)36-18 是多少?
7	从 301 中拿掉 7 是多少?

来源:Griffin,2002. 经作者许可转载。

109

发展多位数数感

低年级学生已经发展了一定的数数概念,但在学习包含有大数字的问题时,例如一个国家的人口、星球之间的距离以及执行一个航天计划所需的费用等内容时,还是会遇到困难。尽管学生们对大数字很着迷,但对它们的理解很有限,并且他们在交谈中还常常夸大数字:"我的生日聚会来了几千人。"当学生对大数字缺乏理解时,他们无法对相应信息进行有效的分析和推理。面对这种情形,教师需要发展学生对于大数字的加工能力,即,发展他们的多位数数感。

110

多位数数感是指学生对一位以上数字的理解和运用的灵活性,包括对于大数字的直觉和运用,以及在不同情境下对多位数的合理性进行判断(Jones, Thornton & Putt,1994)。由于这个问题的复杂性,教师应该选择有意义的活动帮助学生理解大数字运用的背景。

> 多位数数感帮助学生获得对于大数字的理解,并且在不同的问题情境下对多位数的合理性进行判断。

迪兹曼和英格利希(Diezmann & English,2001)通过选择一些活动来帮助学生读大数字,建立有意义的大数字样例,理解表示数量、距离和钱数的大数字等,被证明在小学生中是有效的。

✓ **读大数字**。在这个活动里,引导学生读大数字。给学生展示数量逐渐增大的数字,先从个位数开始,逐渐增大到千位数,最后到百万。同时给出数字的

读法,帮助学生读取数字。

✓ **建立有关大数字的实物样例**。具体的例子可以帮助学生理解不断增长的数字的特性。一个活动是用撒在分成四份的黄油面包上的彩色糖粒(装饰糖)的方式,视觉呈现表示 1、10、100 和 1 000 的数量。学生在第一份面包上放上 1 粒糖,在第二份上放上 10 粒,第三份大概 100 粒(用 10 个一组的方式估计),最后一份大约 1 000 粒(以 100 为一组的方式进行估计)。撒糖粒的活动为学生理解千的数量提供了有意义的例子。一些学生可能会超越实物例子进行推断,并且会发现不可能在一片面包上放上 100 万个小糖粒。

✓ **认识大额面值**。要多大的容器才能装下 100 万美元?在解决这个问题之前,学生要先完成两个任务。第一个是要制作标有 1、10、100、1 000、10 000、100 000 和 1 000 000 美元的标签。让学生辨认杂志和报纸广告中那些大概符合这些价钱的商品,并将标签贴在相应商品上方。这个活动帮助学生提高了对于贵重物品的金钱价值的认识。在第二个任务中,让学生计算在大富翁游戏中所花费的钱数。

在完成这些任务后,学生将努力解决盛放百万美元的容器尺寸的问题。学生应该用到大富翁游戏中的钱来帮助他们解决这个问题。鼓励学生自己动手制作不同尺寸的容器,不事先给出样例。经过讨论,学生应该意识到,正确的答案不止一个。例如,容器的尺寸取决于组成百万美元的钞票的面额。一些学生可能意识到,如果使用小面额的钞票,则需要更大的容器,反之亦然。

111

✓ **认识距离中的大数字**。最亮的星星离我们有多远?这个活动的目的是建立学生对于宇宙范围内大的空间距离的理解。一个方法是让学生做 10 颗星星的模型,并用天空中最亮的 10 颗星星的名字给它们命名,同时标注它们的亮度和到地球的距离。星星可以贴在倒过来的纸杯上以便挪移。让学生一开始按照星星的亮度排列,从最亮的星星开始。

然后,结合星星到地球的距离进行考虑。在学生讨论了有关用光年度量星球距离的概念之后,重新按照到地球距离由近到远的顺序排列星星。通过让学生讨论在星星的亮度和到地球之间的距离有何种关系的问题进一步扩展活动。

为了展示用光年表示星星到地球的距离,画一条时间线,以 100 秒为间隔,从 0 画到 1 000。让学生按照到地球的光年数摆放每颗星星。然后,可以讨论他们今天看到的星星的光亮实际上是几年前发出的。年龄大一些的学生也许能将

从某一特定星球上发出光亮的年代联系到在地球上发生的重大历史事件。用这种方式，学生就在他们对于数学的理解与科学知识之间建立了联系。

2. 课程考虑到估算的问题了吗

与数感有着密切联系的是估算。NCTM 的《课程焦点》(NCTM，2006)指出，三年级学生应该能够"通过心算……通过估算和纸笔计算的帮助，发展对于数字的理解"。在四年级，学生应该"能在不同情境下将对数字的理解和表达扩展到 100 000，他们在判断数量或距离的相对大小时会运用估算"。

估算是大脑感数天赋的一种延伸。估算要捕猎多少头动物，或者需要种多少粮食才够全村人吃的能力是一种生存技能。我们的祖先善长此道。数学教育者常常批评学生薄弱的估算能力。有一次，一个沮丧的老师告诉我，一个中学生在算出一个分子有一米长之后还感到非常高兴。他从来没有见过这么不合理的测量结果。然而，具有讽刺意味的是，年轻人在学校之外却常常能够成功运用估算技能。例如，他们能够很快地估算穿过拥挤的马路需要多长时间，判断兄弟间是否平均分配，或者精准地计算在比赛中投球、截球和击球。那些较差的估算状况似乎仅出现在学校里，当面对计算上的估算问题时才表现出来。而这可能至少有三个原因。

112

> 估算是大脑感数天赋的一种延伸。估算要捕猎多少头动物，或者需要种多少粮食才够全村人吃的能力是一种生存技能。我们的祖先善长此道。那么，我们呢？

第一，学生在较小的时候被教导要获得问题的准确答案，他们没有多少关于估算的经验。另外，那些让学生同时给出估算和精算答案的活动降低了估算的意义。既然要学生去获得准确答案，他们为什么还要去估算呢？

第二，当学生在作业中使用计算器时，他们就会认为计算器给出的答案一定是正确的，他们就不去想会不会不小心输错了数字或输错了小数点的位置。于是，他们几乎不会去反思答案的合理性。

第三，由于学生想要尽快获得答案，于是往往会避免使用占用更多时间的估算。

涉及估算的活动应该在低年级尽早开展。然而它们不应该被孤立为一个单独的教学单元，而应该贯穿于所有年级水平的其他数学技能的教学中。如果我

们想要强调估算的意义，那么就应该给学生布置只需要估算的任务。

估算的方法

通常估算的方法有几种：（1）凑整，是指找出最接近数字的整十、整百、整千的数或最接近的个数、十分之一、百分之一、千分之一的数；（2）首尾估算，这是指从最高的或最左边数位开始算，然后根据低位或右边数值对总数进行调整；（3）聚类，这涉及将数字分组，这个方法只要在一组数都接近某一共同值时就会有用。这些估算方法在学生完成计算任务时极其有用，他们能够检查获得的答案是否接近估算的答案并判断答案是否合理。

学生需要认识到，估算的方法在实际生活中可能并不适用。如果你想买一件 17.45 元的衬衫，往下凑整到最接近的整数价钱并不能让你有足够的钱买下这件衬衫。在涉及有关测量的估算也是如此，如果你需要准确的三又四分之一码的布来做一件衣服，你估算成只要三码就没法做成。因此，在现实生活情境中，向下凑整的估算方法对你来说是不够的。还有什么其他的估算方法么?

估算的类型

泰勒-科克斯(Taylor-Cox，2001) 提出了四种不同的估算类型。

(1) 真实估算往往用于当一个估算的数可以被接受时，特别是对于非常大的数。知道从地球到太阳的平均距离到底是 92 955 630 英里还是 93 000 000 英里真的很重要吗? 真实估算通常适用于中年级或更高年级的问题。但遗憾的是，低年级的学生所遇到的数字通常较小而且比较简单，往往不适于使用真实估算。真实估算对于那些简单的数而言没有优势，因为我们能够很容易算出准确数值。

(2) 高估通常用于向上凑整可能对我们有利时，比如估算孩子生日聚会所需的食品。这种方法的主要缺点是当你高估太多时可能导致浪费，但是如果你低估了，一些孩子就可能无法获得足够的食物。

(3) 低估通常用于向下凑整的时候，这在某些特定情境下会有用。例如最好低估商业所得利润以避免过度支出。

(4) 范围限定的估算将扩展对估算的理解及其适用性。一些情境要求低估

而一些要求高估。一定范围内的估算是指在遇到一个估算问题时思考所涉及数量的高限和低限。“我最少需要多少，最多又需要多少？”在小学，教师可以用一定范围内估算的方法设计有创造性和有意义的数学任务，从而促进学生成为更好的估算者。

有意义的估算活动

为了使估算行为成为有意义的活动，泰勒-科克斯（Taylor-Cox，2001）提出的相关活动包括以下五个部分。

114

✓ **目的**。当你要求学生估算一个数值时，都要给他们需要估算的理由。这个内容为学生解决与实际生活相关的数学问题提供了目的和理由。否则，学生会问：“谁会需要这个？”让任务变得有关联性、有趣和重要，会让学生关注数学，从而让他们能够投入到数学活动中。提供目的并不能保证诸如“谁会需要”这样的问题消失。但是通过听取学生的意见并对他们的观点和感觉进行回应，你就能够应对不断遇到的要求为数学提供意义的难题。

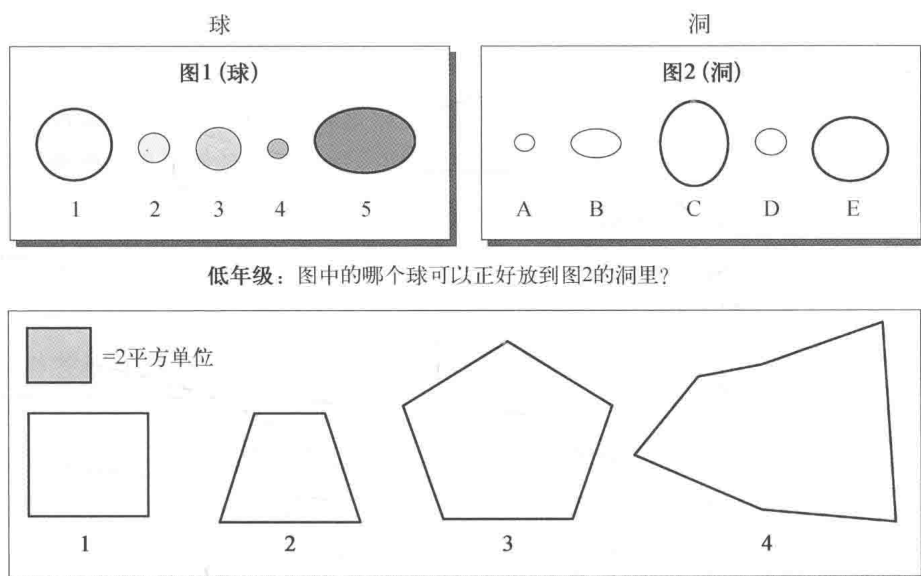
✓ **参照物（基准）**。为了帮助学生成功，可以在他们进行估算时提供一个可以使用的参照物或基准。例如，当你要求学生估算一个瓦罐里的弹珠数目时，给他们提供一个在较小的容器里能够盛放的弹珠数目可能会帮他们完成任务。这个容器就为学生提供了一个参照，从而使他们可以在此基础上估算较大罐里盛放的弹珠数目。

✓ **相关信息**。澄清所需解决的实际数学问题能够帮助学生确定哪种估算方法最合适。例如，如果学生要打开瓦罐并且数出弹珠的准确数量，他们就不需要估计弹珠的数目。正如之前解释的，这样做是与估算的目的相冲突并浪费时间的。相反地，你需要问问自己估算和准确计数哪个更合适。会用哪种方法来核查准确性？什么样的信息与给定的数学情景有关？

✓ **多样性经验**。学生需要获得在其他领域中大量且多样的估算经验，例如时间和测量。小学生在估算时间时通常会感到困难，教师在表述时使用不准确的时间限定对此没有帮助。当他们说“我会在一分钟之内到那里”或者“等一秒钟”时，实际意味着“我会尽快赶到那里”或“等着吧”。或许让学生给老师计时能够促使他们反思对时间的估算，从而增强他们的经验并提高他们估算时间的精确性。

年纪小的学生通过比较长度、重量和容量来练习测量技能。为了估算大小，他们需要用到比较的语言表达，比如说，更大、更小、更重和更轻。图 5.5 显示了两个不同年级组需要估算大小的活动案例。在这几种任务中，学生进行的估算更多地与物体的大小有关而不是与数量有关，他们认识到估算是处理日常测量问题的重要工具。

115



中年级：估算一下，在这四个形状里各有多少个平方单位?

图 5.5　在不同年级发展估算技能的活动样例

√ **范围限定技术**。估算应该在合理范围内运用数学技能进行预测。比如说，一个量或一个测量的准确数值是 70 多，那么合适的估算就应该在 10 个估算误差值以内或者更少。但如果准确数值是 700 多，那么合适的估算误差范围可能就扩展到 60～70 个数。虽然问题情境不同，合适的范围也不同，但这样做的目的是为了让估算能够在合适的范围内进行。然而，许多学生仍然想要估算出精确的量。为了与这种寻求正确答案的需求抗争，使用实际答案之类的术语或许能奏效。每 100 数值的估算误差范围在 10 或 20 之内都是合理的。在碰到需要估算而又很可能高估的情况时，这种范围限定的估算尤其有用。

估算的体验可以提高学生的估算技能，增强他们对于自己数学专业知识掌握程度的自信，加强他们对于数学意义的感知并提高他们数学成就测验的分数(Booth & Siegler，2006)。每个估算活动对于教师而言，都是一次很好的将数学

与学生的日常生活建立联系的机会。

116

3. 从记忆到理解

本章前面讨论了在学生进行数字计算时，让他们知道所进行的行为意义的重要性。意义不仅能够提高信息进入长时记忆储存的可能性，并且在问题性质变化时，能够给学习者提供机会改变运算步骤。如果缺乏意义，学生就不理解到底是怎么算出来的和为什么要这么算，而只能记住那些运算步骤。结果，他们就不知道什么时候该运用什么步骤。运用陈述性方法讲课的教师不仅要强调算式，更要强调这些算式之间是如何关联的，它们与学生已知的其他概念之间有何联系。教师可以使用精细复述的策略并提供认知小结。

我们是为了理解而教授低年级的算术吗

在一些学校里，我们用了太多程序性手段来教算术，却很少用到陈述性方法。这是否可能是因为当初教师自己就是这样学算术的呢？这是否也能解释为什么低年级的算术教学在这么多年里都没有什么变化？我们教学生解决算术问题的程序步骤，他们可以就此反复练习（程序性记忆），但是这种练习并不能提高算术的流畅性，因为我们几乎没讲到怎样运用和为什么运用这些步骤。于是，当我们给学生提出问题时，他们条件反射地从知识中提取出练习过的步骤并有效运用，却不理解其中涉及的数学概念。

> 为了建立理解和意义，教师应该（尽早）向学生说明为什么要进行这些运算。

当然，学生需要学习一些基本的程序性活动，比如随着记住一些算式，记住第二章提到的乘法表，但重点是要（尽早）向学生说明为什么要进行这些运算。我们运用越多包含有理解和意义的陈述性过程来教算术，学生就越有可能学会并真正享受数学的乐趣。

117

基于陈述性方法的样例

基于陈述性的方法主要是利用学生天生的数感，通过操作手指获得的对数数的直觉概念和对于十进制的理解。它包括让学生自己创建计算的步骤，这样他们就可以真正理解其中蕴含的运算法则。研究者早已认识到，低年级的儿童已经能够构建他们自己的计算方法了（Carpenter et. al.，1998；Fuson et. al.，

1997)。通过这样的方法,低年级学生将经历三个可预测的发展阶段。

- 第一阶段,学生处理一个问题里的所有数量。为了获得一组物体的总数,他们会分别数各组物体的数量,把几个组合起来,然后再从头全部数一遍。做减法的时候,学生会数出一组并分出去,然后再把剩下的重新数一遍。
- 第二阶段,学生在解决问题之前会思考问题的各个组成部分。通过从一个可以确定答案的数量开始数或者往回数到那个数的过程,他们充分展现了这一能力。
- 在最高级阶段,学生运用抽象知识并且从不同途径考虑数量。他们运用学过的知识来解决新问题。例如,学生可能运用以前的知识,通过分解或重组十位和个位的方法,认识到 6 + 7 等于 6 + 6 + 1,或者 7 + 9 等于 6 + 10。

理解低年级学生数学思维的发展可以帮助教师预计学生可能运用的方法,并且在他们不断进步的过程中给予支持。当教师鼓励学生发明多种问题解决策略时,教学目标就与那些采用标准记忆程序进行的教学有所不同。教学重点在于发现学生所创造并成功使用的那些方法的意义(Scharton,2004)。

数学教育者苏珊·沙尔通(Susan Scharton)一直积极提倡为低年级学生提供解决计算问题的机会,让他们自己创造计算步骤,并且将他们的方法讲解给其他同学听。她发现,这个办法能够提高学生计算的准确率,并且能够增强对他们自己所创造的方法的理解。当她让学生讲解他们的方法时,学生们对自己方法的理解通过这种精细的复述得以进一步加深。而聆听其他同学提出的方法,能够推动一些学生尝试其他同学的计算方法。

118

沙尔通(Scharton,2004)曾经用过一个例子来展示学生是如何采用多种策略解决如下问题的:"保罗有 28 支记号笔,然后又得到了 34 支,现在他一共有几支笔?"一个二年级学生将 34 写在了 28 下方,尝试使用传统的两位数相加的竖式算法。这是他写下的算式,然后他就停下来了:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 28 \\ +\quad 34 \\ \hline 2 \end{array}$$

他尝试采用标准的步骤，从同列数字相加开始。然而，他并不知道当答案是两位数时，在标准步骤里这一步到底该怎么做：他不知道应该把数字放到哪个位置。他分别处理每个数字，却没有把数字跟数值联系起来。他是在试图使用一个有效的然而他不理解的步骤，并且对于自己所使用的方法并不自信，因为他并不能回忆起那些已经学会了的步骤。而如果这是他自己想出的策略，那他就能依靠自己对于数字和所使用过方法的理解来解决这个问题。

另一个二年级学生，来自一个鼓励学生分享问题解决方法的班级，则采用了不同的方法。她能够运用图 5.6 所示方法准确高效地解决问题。她将数字分为十位和个位，然后再将各部分重组。她知道在一个两位数中每个数字代表着不同的数值，她分析出了问题所具有的交换律和结合律属性，于是自己创造了一套用着顺手而且有意义的步骤。她不仅可以使用合理的方法，而且能够清晰地用书面形式解释她的方法为什么有用和应该怎么用。

计算的时候，我从 28 里拿出 20，并且从 34 里拿出 30，加在一起是 50。我把 50 和 8 相加得到 58。然后，我将 4 分成 2 和 2，我再把 58 加上其中的一个 2 得到 60，再把 60 加上另外一个 2 得到了 62。

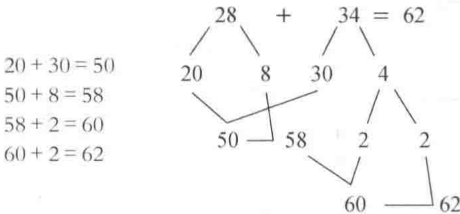


图 5.6　一个二年级学生讲述的自己解决一个两位数加法问题的方法

来源：获准改编自 Scharton，2004。

119

用于一、二年级的教学模式。为了鼓励学生自己探寻解决计算问题的方法步骤，沙尔通（Scharton，2004）设计了一种教学模式，在课堂上让一、二年级的学生交替进行小组讨论和全班讨论。

✓ 这种教学模式聚焦于学生所发明的有意义计算方法，以及他们是如何通过讨论和书面材料将这些方法准确传达给其他人的。下面展示如何操作：

- 小组讨论。学生通常在每周的自由活动时间先参加一个由 4～6 名不同水平学生组成的小组，给小组分配一道计算题。与此同时，给班里的其他学生呈现不同类型问题，并且鼓励学生发明多种解决问题的策略。在小组里，学生用自己发明的或从别人那里学到的方法独立解决问题。他们

将自己的方法讲解给同组的其他成员听(精细复述),并讨论大家所用方法之间的相似和不同之处,同时讨论这些方法在哪些方面相关联。学生将他们解题的方法写下来。

- 班级讨论。小组讨论之后进行班级讨论,可以让学生将一系列方法讲解给更多的人。课堂讨论应该集中讨论每种方法的有效性、方法之间的关系、有效地呈现交流方式,以及每种方法怎样做和为什么这样做。在全班讨论结束后,给学生另一道类似的题目,以判断学生学习的迁移程度,即学生讨论过的那些策略中有哪些可以用于解决新的问题。学生每周都重复这样一个循环。图 5.7 演示了这种教学模式。

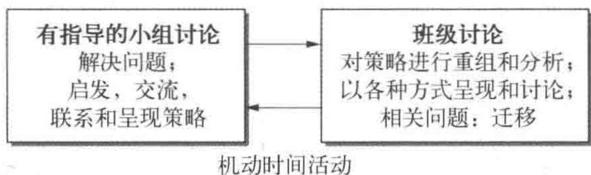


图 5.7 沙尔通为一、二年级学生提出的教学模式

这个由沙尔通(Scharton,2004)为一、二年级学生提出的教学模式鼓励学生在小组里开发策略并在全班讨论中跟大家分享。(经作者许可转载)

通常,在大多数小学课堂里,算数教学的目标就是要准确快速地运用教师演示的算法规则。而沙尔通的模式则鼓励学生自己开发计算步骤,向同伴清晰讲解这些步骤和分析这些步骤的关联性、效率和效果,从而培养年幼学生的高效计算能力。

4. 理解基础上的乘法

一个小学校长最近谈到她与家长之间关于三年级数学课程的一些谈话。家长觉得教师应该大力强调背诵乘法表。家长认为,三年级的数学应该包括通过机械记忆和练习、工作表以及其他手段来帮助记忆乘法算式。但这位校长正在提倡一种鼓励问题解决和理解的教学方法。她向家长解释,这种方法会帮助学生将乘法过程记忆保留得更长久。她通过自己的经验解释,那些在三年级掌握了乘法表的学生在以后的日子里几乎都不再记得。显然,三年级记忆的乘法表并没有什么作用,因为乘法表并没有帮助学生建立对乘法概念的理解。即使经

120

过“回到基础(back to basics)”和课程的学习[①],他们仍然不知道乘法为何物。

《学校数学教学原则与标准》(NCTM,2000)指出,“在理解的基础上学习数学是根本”。研究显示,“事实性知识、过程熟练性和概念理解的三者结合将使这三个成分发挥更有效力的作用”。NCTM 的《课程焦点》(NCTM, 2006)强调“学生通过演示的方式理解整数乘法和除法的意义”。

通常,学生很自然地发展了加法能力,但乘法比加法复杂得多,因此需要通过指导才能理解每个步骤都是组成整个运算过程的重要成分。在尚未获得对于乘法的理解之前记忆算式,学生会对理解乘法意义的需求和适用乘法的情境产生错误印象。

因此,理解乘法意味着什么呢?数学教育文献指出,对于乘法的基本理解需要四个相互关联的概念:(1)数量;(2)需要用到乘法的问题情境;(3)相等的组;(4)与乘法有关的单位。在低年级,大多数理解是通过儿童数数和分组策略在解决有意义问题的经验中获得的。

121

- **理解数量**。在加法中,数量的意义常常被忽略,然而,这是理解乘法的重要基础。数量是物体能够被计数和被测量的一种特性,它包括一个数字和一个单位。7 美元就是数量的一个例子,它包含了数字 7 和单位“美元”。数词(例如,7)通常用来表示数量的数的部分,当然数也可以用其他的方式表示,比如图片(如,可以用 7 张钞票表示 7 美元)。除了数字之外,必须要确定一个单位才能获得完整的数量概念。一个计数是数的一种特别类型,属于多个物体组成的集合的数量特征的一部分,它用来回答“多少”的问题。数数是从一个一个数开始,然后发展到数更大的相同单位的数。学生需要积累大量的数数经验,才能清楚地知道数量的这两个属性以及多种表示方法。而测量(如,长度)也是数的一种特殊类型,它是关于一个物体的连续特性。测量包括选择测量的合适单位(如,英寸),并确定在这个物体的连续特性方面所包含的单位的数目。因此,为了全面了解数量,学生需要了解离散量与连续量之间的区别,认识到它们是用不同的单位和不同的步骤(数数 VS. 测量)来确定数量的值的。

---

① “回到基础”是一种传统教育方式,由欧洲传入美国。它提倡重新以传统的背诵和记忆方式为主的教学,强调在教师引导下的教学。——译者注

- **理解需要用到乘法的问题情境**。学生需要一定的经验来解读需要用到乘法的文字应用题情境，并与其他需要运用加法、减法或除法的情境区分开。学生还需要理解乘法与除法之间的关系，并能够根据算式的三个数中已知的任何两个数的信息，得出另一未知数（如，3×7＝？或3×？＝21）。
- **理解相等的组**。学生需要练习将物体分组，以理解乘法中相等组别的作用，并理解等组相乘而不是将所有物体相加所带来的效率。数感包括将数字组合和拆分的能力。乘法中的推理包括在组合和拆分数字时，用因数和倍数均分等组，而不是相加。例如，8个物体可以分成各种表示乘法的组（8个一组，4个一组的2组，2个一组的4组或者一个1组的8组）而不是表示加法的组（1和7，2和6，4和4，8和0）。视觉图像对于理解分组尤其有用（如，60件散乱的物品和被分成12个一组的5组物品，或排成一列6个共10列的60件物品之间的差别）。

122

- **理解与乘法相关的单位**。学生需要练习将物体分组并数数，才能理解与乘法有关的各种单位之间的差异。加法最常涉及的是将相同单位不同数量组合的情境（如，35分钱加24分钱）。然而，乘法中的两个数量还常常具有不同的单位（如，每条狗的4条腿乘以12条狗）。学生还需要理解单位在乘法中可能发生的转换。例如，7个橙子加7个橙子得到的是14个橙子，但是两个相同的单位相乘，例如7英寸乘以3英寸，却得到21平方英寸。

一种加深学生对乘法过程理解的办法是用手算演示乘法的不同运算方法。图5.8展示了将一个三位数与一个两位数相乘所采用的传统方法（a），以及被称为方格乘法的方法（b）。乘法需要三步：相乘、进位和相加。在传统方法里，相乘和进位步骤是一起做的，所以很容易混淆。在方格乘法中，每一步都很清晰。这个方法是由著名的数学家斐波那契（Fibonacci）于1202年通过他的专著《计算之书》（*Liber Abacii*）引入欧洲的。

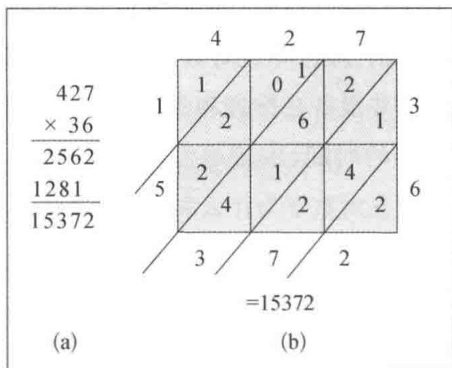


图5.8　左侧（a）部分的数字表示计算两位数乘法的传统方法，而（b）展示的是方格算法

步骤很简单。如果我们要将427乘以36，则将427写在格子的上方，将36竖着写在一个3×2的矩形方格（因为我

们有一个三位数和一个两位数)的右边。我们将上方横排的数字与每一行右侧的数字相乘并填入格中,如果得数为两位数,那么将十位上的数字写在每个方格的对角线的上方,而个位数写到对角线的下方;如果得数是一位数,那么在对角线上方填入零,而将个位数写到对角线下方。

123 当所有的组合都乘完后,我们顺着对角线将数字相加,从对角线内右上方的数字开始,然后沿对角线相加并将所得的和放到格子的左外侧;如果得数是两位数,那么将十位数放到对角线左侧的最上一行,并且加入到那列对角线的得数中。从格子外侧的左上方起,将所得数字一直读到底部,这样得到答案 15 372。这个方法不是万能的,但它能提供新颖的也许是一些学生所需要的能更好理解乘法步骤的方法。

5. 课程培养了乘法推理能力吗

NCTM 的《学校数学教学原则与标准》(NCTM, 2000)和《课程焦点》(NCTM, 2006)提倡从一年级开始就要加强对数学推理能力的培养。一年级的孩子应该已经有一些关于十位数与个位数的交换律和结合率的概念,能够运用他们所理解的策略解决两位数的加法和减法问题。数学推理也包括空间和量的概念,以及元认知,这是指对于你正在做什么,为什么要这么做并据需要做出调整的思考。

数学能力涉及技能、知识、程序、理解、推理和应用的综合。但在很多情况下,数学教学集中在技能、知识和成绩上,也就是说,集中在学生知道的和能够做的是什么。这样,学生仅仅学会使用常规的方法,导致对数学肤浅的理解。我们并没有在推理和深度理解上花费足够的时间,也就是没有把充分的时间用在对数学为什么和怎么样进行思考。知识和成绩并不是推理和理解能力的可靠指标。为了达到深度理解,必须使什么、为什么和怎么样紧密连接,只有这样,学生才能知道不同模式的重要性并投入到数学推理中去。

> 在大多数情况下,数学教学集中在技能、知识和成绩上,但是几乎没把时间用在推理和深度理解上。

前青春期的学生能进行数学推理吗

前青春期的脑是否发育到了能够进行推理的水平?答案是:是的,但这得

看是什么推理技能。在 6 岁之前，大多数学生能够表现出运用实物的演绎推理能力。抽象推理也是可能的，但更困难。在青少年早期并随着青少年成长过程中，大脑额叶的成熟使得推理逐渐变得容易。前青春期学生的老师能够从书本和网络上找到许多加强推理技能的方案。开展帮助学生从实物推理进入抽象推理的活动实际上也能够让学生从计算思维进化到代数思维上。

124

这里有一个例子：给一、二年级的学生呈现一系列算式。让他们讨论这一系列算式并进行概括（推论）（Carpenter & Levi，2000）。

算式	**学生的推论**
7 − 9 = −2 10 − 14 = −4 15 − 20 = −5	当从一个数里减去另一个比它大的数时，你通常会得到一个负数。 那么：7 − 16 = ?
8 + 0 = 8 11 + 0 = 11 0 + 15 = 15	零加一个数等于那个数。 那么：19 + 0 = ?
6 − 6 = 0 12 − 12 = 0 14 − 14 = 0	如果一个数减去相同的数，你会得到零。 那么：21 − 21 = ?
4 − 0 = 4 13 − 0 = 13 21 − 0 = 21	如果用一个数减去零，你的答案将会是同样的数。 那么：18 − 0 = ?
3 + 3 = 6 6 + 6 = 12 11 + 11 = 22	如果将两个大于零而且相同的整数相加，你会得到一个偶数。 那么：14 + 14 = ?
5 + 3 = 8 11 + 7 = 18 15 + 9 = 24	如果将两个奇数相加，你会得到一个偶数。 那么：13 + 17 = ?

125

8 + 3 = 11	如果将一个偶数和一个奇数整数相加，
14 + 7 = 21	你将会得到一个奇数整数。
18 + 9 = 27	那么：6 + 11 = ?

理解等号的含义

尽管大多数低年级学生已经具有推论的能力，他们仍然很难将等号看成是表示关系的符号。即使在进入小学高年级之后，大多数学生仍然认为等号是一种操作符号，意思是"得到总数"或者"将答案写在此处"。让他们定义等号的意义时，学生不仅给出了操作性的解释，还认为将等号作为"总数"或者"答案"的解释比"等于"或者"两个相等的量"的解释更为准确（McNeil & Alibali，2005）。有一项研究证明，年龄并不是学生对等号采用操作性定义而非关系性定义的原因。当研究者询问一到六年级的学生，"在算式 8 + 4 = ____ + 5 中，横线上应该填入哪个数才能使等式成立"时，他们发现，各年级只有不到 10%的学生给出了正确答案，并且，完成任务的成绩并不随着年龄的增长而提高（Carpenter，Franke & Levi，2003）。显然，现在的问题是，前青春期的学生在理解等号上出现的困难究竟是因为认知结构的不成熟，还是跟他们早期的计算经验有关。

有多项研究致力于找到这个问题的答案。一个有关二年级课堂教学的个案研究对学生实际看到等号时的情景进行了系统的调查。研究者分析了学生在课堂上使用的两本数学教材，他们发现，等号几乎总是在"运算——等号——答案"的情境中出现（如，4 + 5 = ____）。这个发现符合那些认为学生对于等号的理解与他们的经验有关的观点（Seo & Ginsburg，2003）。

> 大多数中学生都不会把等号理解为一种关系性的符号，这给代数运算造成了困难。他们的课本对此没有帮助。

在一项对四种普通中学数学课本的调查中，研究者发现，等号在课本里常常在"运算——等号——答案"的情境中出现，很少出现在两边都是运算的情境中。这样的练习可能强化了学生对于等号是一种运算符的理解。看来，中学的数学

126

课本并未从帮助学生获得对等号的关系性理解的角度进行设计。尽管等号在"运算——等于——答案"的情景中出现的比例在中年级阶段逐渐降低，但是，直到八年级，许多学生仍然将等号理解为一种运算符（McNeil，Grandau，Knuth，Alibali，Stephens，Hattikudur et al.，2006）。

研究者发现，如果没有背景知识，甚至中学生也没有表现出对等号的关系性理解。将七年级学生随机分组，分别给各组呈现三种等号情境中的一种：单独呈现（=），在“运算——等号——答案”的情境中呈现（如，4 + 5 + 6 + 4 = ____），在两边都是运算的等式中出现（如，4 + 5 + 6 = 4 + ____）。在单独呈现条件下，只有11%的学生对于等号有关系性的理解，在“运算——等号——答案”的情境下，有25%的学生对于等号有关系性的理解；在两边都是算式的条件下，则有88%的学生表现出了对于等号的关系性意义的理解。显然，总的来说，七年级学生尚未将等号理解为一个表示相等的关系性符号，但当给他们呈现在等号两边都有算式的情境时，他们能够将等号理解为表示关系的符号（McNeil & Alibali, 2005）。这个发现很重要，因为中学（或小学高年级）是学生从计算学习向代数学习转换的阶段，对于等号的关系性意义的理解对于这个转换成功与否至关重要。

显然，更多以两边都是算式的方式呈现等号将使学生获益。关于等号的概念是复杂的，对于学生而言是难以理解的，但它是代数的核心思想。然而，促进学生对等号的理解以及让他们做好学习代数的准备，可能要求教师在教学实践中作出改变，同时，也要求小学和中学的数学课程和课本发生相应变化。在给学生阐述相等的内容时，教师应该以不同的方式呈现，以便进一步帮助他们建立有关相等的概念。

6. 让年轻的学生有效地练习

我们在第三章提到，练习能够使学习者在新的情境中以足够高的正确率运用新学到的技能，从而正确记住所学技能。在学生开始练习前，教师应该示范解题所涉及的思考过程，并且带领全班学习新方法的每一个步骤。

由于练习会带来持久的效果，教师需要监控学生最初的练习以保证其准确性，提供及时的反馈并在错误的时候进行纠正。这种指导下进行的练习可以帮助学生消除最初的错误，并且提醒学生在应用新技能时需要注意的关键步骤。以下是亨特（Hunter, 2004）对于指导最初练习，尤其是指导年幼学生练习时的一些建议：

✓ **控制练习所采用的材料数量**。练习应该采用最少且跟学生最相关的材料或技能。这将使学习者在使用新的学习内容时，加深对所学内容及其意义的理解。记住，大多数前青春期的学生在工作记忆中一次只能处理五个项目。　127

✓ **控制练习的时间**。应该在学生工作记忆的黄金时段，短时段频繁地练习。

当练习周期较短时，学生更容易专心于他们所练习的学习内容。要记住，我们在第三章中提到过，对于前青春期学生而言，只有 5～10 分钟有限的工作记忆时间。

√ **确定练习的频率**。新的知识在一开始需要频繁练习，这样它才能很快得到整理(集中练习)。注意变换练习的情境以保持学生的兴趣，年轻的学生会对重复性的工作很快地感到厌烦从而失去兴趣。为了在长时记忆里保持信息，并且准确地记住应该如何应用，学生持续练习的时间间隔应该不断增加(分散学习)，这是保证长期准确地保持和应用信息以及掌握技能的关键。

√ **评价练习的准确性**。当学生在指导下进行练习时，对练习正确与否以及原因都要给予迅速且具体的反馈。让学生用他们自己的语言总结你的反馈。通过这个过程你将获得关于学生理解程度的宝贵信息，并帮助你确定是继续推进，还是需要对一些学生感到困难的部分再讲一遍。

作为一种练习形式的测验

大多数人认为，书面测验的目的是评估学生对所测试内容掌握得怎样。这是一种很狭隘的观点。书面测验能够告诉我们更多的情况。例如，书面测验更能够：

- 让学生练习所学内容；
- 为教师提供关于每个学生学习情况的信息；
- 帮助教师分析是否达成了教学目标。

对于低年级学生，教师应该主要将书面测验作为练习手段，并且每隔三到四次才记录一次分数。口头测验是一种很好的替代方法，因为这样压力更小，相对书面形式而言，低年级学生用口头方式能更清楚地告诉你他们都知道了什么。

128

7. 图表形式

我们在第五章提到，如今的学生成长于一个视觉的世界。他们被电视、电脑、电影、便携 DVD 和手机包围。因此，在数学课堂中使用视觉工具有着重要意义。图表是视觉工具的一种，它不仅可以吸引学生的注意，同时还是增强理解、意义和记忆力的重要工具。

书籍中和互联网上，有许多不同类型的图表(参见本书**资源**部分所列的网站)。以下展示的是戴尔・格雷厄姆和琳达・梅耶尔(Dale Graham & Linda Meyer，2006)为中学数学课程开发的两个样例，在此经作者许可转载。

表 5.4　实数体系的特征是什么

属　　性	加　　法	乘　　法
封闭性		
交换律		
结合律		
恒等式		
倒数		
分配律		

来源：获准改编自 Graham & Meyer，2007。

129

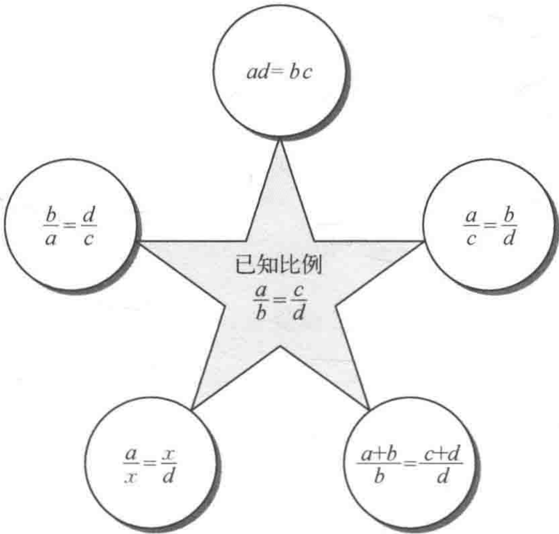


图 5.9　比例的特性是什么

来源：获准改编自 Graham & Meyer，2007。

8. 不要忘记新技术

今天的学生是伴随着技术长大的。采用新技术需要时间、精力和对教学方法的再度审视。研究指出，教师对技术的使用既没有如学生所希望的那样频繁，也没有以学生觉得有用的方式进行。在最近一项对 66 所小学、143 所初中和 163 所高中的课堂所进行的研究中发现，大多数学生反映，他们的老师很少或只是偶尔使用技术来深入剖析数学概念、收集或组织信息，或作为评价和沟通的工具。并且，大多数学生认为教师使用这些技术对他们的学习帮助有限（Lawrenz，

Gravely & Ooms，2006）。

为什么不在数学课上经常使用技术呢？一项对近 100 名数学教师的研究发现了限制或促进教师在数学课上使用技术的一些因素（Forgasz，2006）。下面对

130

5 个最具有限制性的因素按重要性排序，依次为：

（1）计算机或机房数量有限；

（2）需要更专业的技术；

（3）准备课程和设置计算机所花费的时间；

（4）缺乏经验、自信和技能；

（5）设备陈旧，缺少技术支持。

5 个最具有促进作用的因素按重要性排序，依次为：

（1）充足的计算机和机房；

（2）教师的自信、能力、经验和使用技术的愉悦感；

（3）软件的质量、种类、激励程度、乐趣和相关性；

（4）学生对于使用技术的愉悦感；

（5）强有力的技术支持。

你的学校中存在哪些限制因素或促进因素？可以做些什么来克服限制因素，保持或创造促进因素？

有时候，教师一方面拥有在数学研究中使用技术的热情，另一方面又担心学生的计算能力被削弱。研究显示，特别是在中年级的数学教学中，使用技术对于学生的学习态度、学生对自己数学能力的自信和学生完成任务的动机和速度都有着积极的作用。并且，使用技术能帮助学生在数学成绩和概念理解方面取得重大收获（Ninnes et al.，2005）。

> 对于非常规的（即新异的）问题，例如剖析数概念和解决复杂问题等，将使学生加深对概念的理解并获得更好的成绩，而对常规的计算问题，使用技术则没有这样的效果。

研究还提示，对于非常规的（即新异的）问题，例如剖析数概念和解决复杂问题等，应用技术将使学生加深对概念的理解并获得更好的成绩，而对常规的计算问题，使用技术则没有这样的效果。学生通常把计算器视为简单的计算工具，但是，当他们用计算器进行数学研究或问题解决时，就会拓宽他们的感知，并将计算器视为能够促进数学学习和数学理解的工具（Guerrero，Walker & Dugdale，2004）。

四、下章预告

131

随着大脑额叶在青春期的发育，学生应该能够成功解决更复杂和更抽象的问题，但许多青少年并不能学好高中数学课程。为什么会这样？教师又能做些什么来提高这个年龄段的学生的数学成绩？有关青春期学生数学成绩的各种问题的答案，请看下一章。

五、本章反思

132



在此页简略记下要点、想法、策略和资源，以备日后思考。此页是你的个人日志小结，它能帮助你日后回忆。



133

第六章　教青春期学生学数学

任何职业都不能没有算术，任何机械发明都需要几何。

——本杰明·富兰克林(Benjamin Franklin)

一、什么是青春期学生的大脑

近年来，研究者开始聚焦于了解青春期学生大脑的能力与局限性。回顾第五章，大脑额叶区域比边缘系统成熟得更慢，因此大脑不能很好地控制自发行为。青春期学生看上去，甚至有时候行为处事都很像成年人。但最近的一些研究显示：额叶发展水平的不同可能是青春期学生与成年人之间一个最重要的差异。虽然本章提到的策略主要针对青春期学生，但其中的一些策略无疑也适用于前青春期儿童。

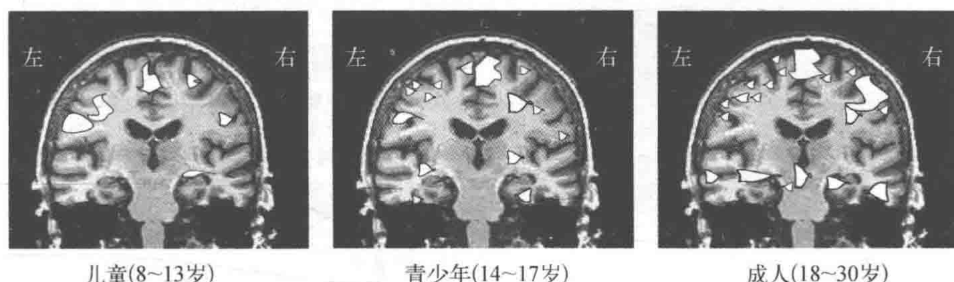
1. 额叶的过度使用

大部分关于大脑生长和发育的新知识来源于功能性磁共振成像(fMRI)的脑成像研究。有一项研究全面扫描了8～30岁的被试在处理视觉运动任务时的大脑。研究者发现，青春期学生比成年人更多地使用前额皮层。实际上，他们使用前额皮层的量与成年人在处理更加复杂任务时使用的量相似。青春期学生过度依赖不

134

成熟的脑区可能导致问题的产生。成熟的前额皮层能让人更容易运用理智压制反射性或情绪化的行为，但和成人大脑相比，青春期学生的大脑更难压制自动反应。而成年人会用其他脑区来协调与更好地分担工作负荷（Luna，Thulborn，Munoz，Merriam，Garver，Minshew et al.，2001）。

图 6.1 显示在青春期学生大脑中如何占用大量的额叶资源来处理一个视觉运动任务。成人大脑则从其他脑区补充了更多的资源来分散工作负荷，并协调处理任务。因此，如果在已经压力重重的情况下又发生了意外，那么青春期学生将用尽他们前额皮层的资源。这也解释了为何青春期学生常出现冲动或轻率的行为。



儿童(8~13岁)　　青少年(14~17岁)　　成人(18~30岁)

图 6.1　额叶区域使用情况

这些有代表性的 fMRI 结果显示，青少年的大脑严重依赖额叶区域来完成视觉空间任务，而成人则将工作负荷分散到其他脑区（Luna et al.，2001）。

工作记忆持续发展

工作记忆的作用之一就是控制和引导自发行为。在青春期，工作记忆仍在持续发展。fMRI 成像显示，青少年不能像成年人那么有效地调动脑区来支持工作记忆。有关空间工作记忆的研究显示，在青春期早期，青少年虽然能够很好地完成空间工作记忆任务，但与年龄大一些的青少年相比，他们需要占用更多的神经回路。此外，如果他们在完成一个额外任务时感到压力，他们会变得更加没有效率。这可能是由于皮质醇的缘故，这是一种当机体遇到压力时释放到血液中的激素。它为机体应对压力做好准备，并会降低工作记忆关注无关或不重要的学习任务的能力。

在完成同样的工作时，年龄大一些的青少年似乎比年龄小一些的青少年调用更少的神经元，并采用不同的策略。研究者发现，年龄大一些的青少年能通过

135

口头策略，而不是机械的空间再现来完成任务。随着青春期学生的成熟，大脑能够使用更多的脑区并将某些任务分配至专门的脑区。这个过程可以节约神经资源，并能完成相同的任务（Schweinsburg，Nagel & Tapert，2005）。

我们在第五章中讨论过 4～21 岁个体的追踪脑成像研究结果。表 6.1 对研究成果做了归纳总结，并补充了聚焦青春期学生的大脑扫描实验结果。

表 6.1　青春期学生大脑发育以及启示

研 究 发 现	对学习数学的可能启示
青春期之后，灰质体积不断减少，直至 20～22 岁，不需要和不健康的神经元都被损毁。同时，白质由于有更多的髓鞘细胞包围在神经元周边而变厚，从而增强对信号的保护与传递	随着神经网络在额叶开始稳固，学习者能处理需要归纳和演绎推理的更复杂的问题
颞叶的部分区域（位于耳朵的上方）最晚成熟，即使与其相关联的一些脑区早已成熟（例如视觉和语言加工区）	颞叶主要负责听觉加工过程，但它也有助于视觉物体识别和将词汇与物体关联。年龄大一些的青春期学生与年龄小一些的青春期学生相比，能够从视觉和听觉上对平面与立体的物体进行更好的命名和区分
在问题解决过程中，青春期学生要比成年人更多地使用额叶区	额叶的过度使用会导致在问题解决中出现冲动和情绪化（而不是理智）的反应
工作记忆（主要位于额叶）成熟缓慢	青春期学生难以解决所包含变量和/或成分超过工作记忆有限容量的问题

来源：Gogtay et al.，2004；Luna et al.，2001；Schweinsburg et al.，2005。

136

类似成年人的经历是否能加速成熟

我要指出，并非所有的神经科学家和心理学家都接受青春期学生额叶成熟的速度与遗传密切相关的观念。他们认为在其他国家，青春期学生与成人接触的时间多于和同伴接触的时间，因此就不会表现出像北美青春期学生那样的不成熟行为（Sabbagh，2006）。如果环境能为青春期学生大脑提供更多类似成人那样的经验，他们就很可能避免出现伴随这个成长阶段而来的压力和反社会行为。此外，他们还认为允许青春期学生做一些成人的决定（例如服兵役）将加速额叶的成熟。

遗传因素与环境对每个青春期学生大脑发展的影响程度很可能是各不相同的。尽管如此，这方面对学校教育的启示是：不要认为青春期学生在生理上有多么不成熟，以致他们不能完成包括数学在内的具有挑战性的任务。

2. 对新奇事物的探索

在第五章中我们讨论过，发展中的青春期前的大脑是如何对新异刺激进行反应的。从青春期开始，直至整个青春期中，青春期学生对新异刺激的探索变得越来越频繁。当充满好奇的青春期学生尝试新的挑战，如玩一个视频游戏时，他们会一直玩到完全掌握为止。然后新鲜感消失，他们就开始厌烦并转向新的游戏。认知神经科学家把这种现象归因为大脑半球不同的特定功能，以及这些功能对于新学习产生的影响。最近的一些研究表明，大脑半球的特异性可能主要集中在对新奇事物和常规事物的不同偏好。仔细观察脑损伤病人发现，右半球严重损伤的病人在面对新的学习情境时会遇到困难，但能正常地完成如语言这样常规的任务。相反，左半球严重受损的病人能够创作新画并思考抽象问题，但很难完成常规的操作任务(Goldberg, 2001)。

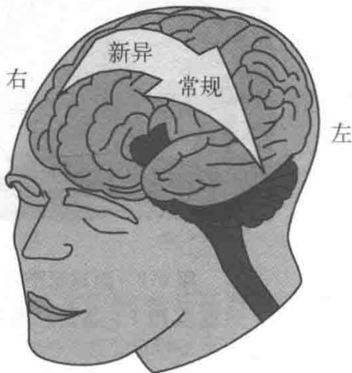


图 6.2　大脑对新奇经验的探索

通过不断的接触，新奇的经验成为常规，而它们的皮层加工区域也从右半球转到了左半球。

137

这些结果让我们能够从不同角度思考大脑是如何学习的。研究者认为，在面临一个新情境而个人还没有形成应对策略时，主要运用右半球并尝试应对。在数学中，举个例子，可能类似于学生第一次接触一元二次方程时。随着大脑不断地接触相似情境，应对策略最终形成，并且导致行为的改变，从而意味着学习的发生。经过充分且及时地重复，反应变得常规化，并转向左半球(见图 6.2)。从右半球向左半球转变所需要的接触情境的时间长短和次数在个体间存在很大的差异。但很可能数学的某种天赋就是指学生的大脑能够以少于平均水平的接触时间和次数实现数学运算所需要的从大脑右半球转换到左半球的能力。

数学的某种天赋就是指学生的大脑能够以少于平均水平的接触时间和次数实现数学运算所需要的从大脑右半球转换到左半球的能力。

脑成像研究提供了支持自右向左转变的证据。在一项研究中，研究者使用正电子发射断层扫描(PET 扫描)来测量被试学习不同类型信息时大脑血流模

式的变化。大脑血流水平的改变表明神经激活的程度，当信息比较新奇时，右侧颞叶被强烈激活。当向被试数次呈现信息之后，右侧颞叶的激活水平急剧下降（见图 6.3）。然而，在这两种情况下，左侧颞叶的激活水平都保持不变（Martin, Wiggs & Weisberg, 1997）。

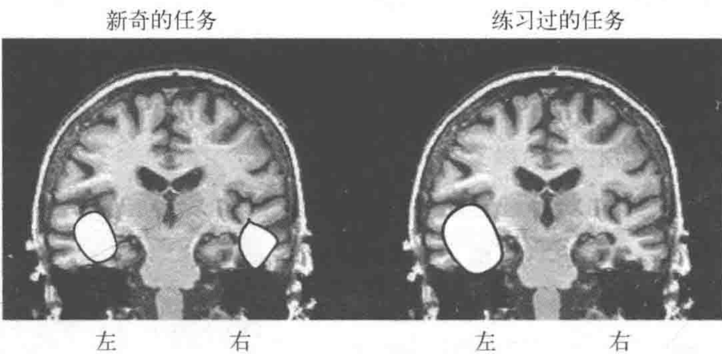


图 6.3 面对新奇的任务和练习过的任务时的脑区血流对比

在这张 PET 扫描显示图中，白色区域显示对于新奇任务和练习过的任务的脑区血流变化。这张图揭示了左右颞叶在新奇任务下被强烈激活，而练习过的任务只激活了左侧颞叶。

其他涉及各类学习任务的研究也报告了类似的结果，如面孔与符号识别研究（Schwartz et al., 2003）、学习复杂运动技能研究（Krakauer & Shadmehr, 2006）学习与重复学习不同单词或规则体系的研究（Berns, Cohen & Mintun, 1997; Habib, McIntosh, Wheeler & Tulving, 2003）。无论给被试呈现何种类型的信息，都会发现相同的转换。换句话说，大脑右半球与新奇刺激相关联，大脑左半球与常规信息相关联，而这种关联特征似乎与被试所学信息的性质无关。

138

新奇性与数学

教师能最终决定数学是充满新奇性还是全无新奇性。如果青春期学生已经掌握了数学运算，而我们还是继续给他们布置更多的相同作业，那么完成这种重复练习对他们而言是没有任何意义的。他们会失去兴趣，然后觉得数学既无趣又缺乏变化，他们的动机减弱，然后学习成绩下降。对于教师来说，这其中的关键为保持学生动机的关键成分、兴趣和注意，对教师而言，关键就是找到与数学运算或概念相关的、不同而有意义的应用。更为关键的是，教师需要知道每位学

生需要多少练习才能掌握。

如果一门数学课程主要使用严格规范的方法，注重记住抽象的公理和定理，那么新奇性和动机同样会被破坏。这种教学模式起源于20世纪70年代，基于把人脑比喻成计算机的模型理念，它认为人脑中的认知过程与计算机的内部加工过程相似。随着神经科学揭示了更多有关控制人脑认知过程的深层机制后，我们可以清楚地发现人脑的操作和计算机操作之间的差异性远远大于它们之间的相似性。青春期学生的脑不同于电脑，它是一个结构性实体，只需要那些能够整合学生先验知识的事实，以明确新的情况；它会适应表达连续量，并以模拟的形式进行心理操作。但是，它并不具备解决大量公理或符号运算法则的天赋。对于大多数人来说，要完成这些任务，需要大量的动机、兴趣以及新奇性。

青春期学生的大脑与代数

青春期学生的大脑在认知加工中对于额叶的严重依赖也可能有其积极的一面。一项来自fMRI研究的有趣发现是，在学习代数时，青春期学生可能比成年人更具优势。这个研究指出，经过数天的练习，像成人那样，青春期学生依赖前额皮层区域来提取代数规则解决方程。然而，与成人不同的是，练习之后，青春期学生减少了对于用来保持方程图像的大脑顶叶区域的依赖。对于研究者来说，这就意味着，与成人相比，发展中的青春期学生的大脑的前额区域更具可塑性，因此通过练习可以发生更多的改变，从而导致青春期学生学习代数能力的增强(Qin et al., 2004)。

> 看来，青春期学生的大脑可能的确比成人大脑具有更强的天赋，可以更容易地学习代数。

二、学习风格与数学课程

139

1. 定性与定量的学习风格

认知研究者认为，青春期学生在数学学习时有不同的学习风格，是一个从定量学习到定性学习的连续体(Augustniak, Murphy & Phillips, 2005; Farkas, 2003; Sharma, 2006)。具有定量学习风格的学生以线性的常规方法来学习数

学。他们更倾向于和数字而不是实物样例打交道，遇到需要运行多步骤才能获得答案的问题时可能会存在困难；而具有定性学习风格的学生则喜欢概念而不是规定步骤，喜欢利用样例而不是数字。这个研究提示我们，如果教师能够使用与学生的认知风格相匹配的教学策略，学生的数学学习将更有可能获得成功；而如果同时采用两种策略，则可能弥补学生的不足。

√ 表 6.2 和表 6.3 分别举例说明了与定量风格和定性风格学习者所表现出的适合他们数学行为的教学策略。这些策略的目的在于帮助教师应对在不同学生身上发现的特定数学行为。这些策略针对特定需求，通过练习可以弥补学生的不足。然而，在某一学习情景中，期待教师识别每个学生遇到的问题并选择针对个人的策略来处理是不现实的。

140

表 6.2 针对定量学习风格的教学策略

数 学 行 为	可考虑的教学策略
按规定的方法应对不同情境	注重每个概念或步骤在言语方面的意义
用机械的、常规的方法学习数学	突出概念，并强调学习的整体意义
强调组成部分而不是整体数学结构	鼓励对概念整体框架的明确描述。寻找部分与整体之间的联系
更倾向于用数字的方式而不是实物样例	一步一步地将样例与数字联系起来
倾向于用线性方法学习数学概念	最开始使用大框架，并使用不同的方法来学习相同的概念
对于要求多步运算的问题有困难	将多步任务拆分成小的单元，并解释单元之间的联结

141

表 6.3 针对定性学习风格的教学策略

数 学 行 为	可考虑的教学策略
更喜欢概念而不是运算法则(解决问题的步骤)	首先把样例与概念相联系，然后在引入运算法则之前先按步骤解题
忽略局部以认识几何结构的整体形状	强调每个部分是如何构成整体的几何形状的
在精确计算上有困难，不擅长解释获得正确答案的过程	鼓励清晰地描述所运用的每一步骤
可以对一个问题提供多种方法或答案	运用模拟的和实际的问题来显示在不同情境下概念的应用

续　表

数学行为	可考虑的教学策略
倾向于设置问题，却无法跟进一个解决方案	给学生提供在多风格合作型的学习团队中学习的机会，为了确保全程参与，为问题解决方法和问题设定的学生计一个分数，再给获得精确答案的学生计一个分数
能从运算操作中获益，并享受和几何相关的主题	提供多种演算和样例以帮助数字操作。寻找几何与新概念的联结

通过了解数学学习的不同方法，老师更容易选择能使所有学生成功学习的指导策略。

2. 培养数学推理能力

在青春期，随着青少年脑的逐渐成熟，教师应该给学生们提供涉及越来越多复杂推理的具有挑战性的数学问题。归纳推理和演绎推理是在数学领域最普遍使用的两种推理类型。归纳推理，有时候也称作自下而上的方式，是由局部推出整体，或由特殊推出一般。在归纳推理中，我们从特殊的观测值与测量值开始，寻找其中的模式与规律，制订一些可以探索的假设命题，然后发展成一般的结论或理论。如“太阳在今天、昨天和前天都升起了，我推断太阳明天也会升起。”

142

演绎推理，有时候也称作自上而下的方式，人们在已知的原则（或前提）下得出结论。“三角形 A 有 3 个 60 度的角。三个角都是 60 度的三角形被称作等边三角形。因此三角形 A 一定是等边三角形。”归纳推理一般用于对属性的猜测，演绎推理则用于证明这一属性在所有情境下都成立，或在某些情境下成立。

表 6.4 中给出了运用归纳和演绎方法引入一个新的数学概念时可遵照的步骤。前面的步骤适用于定性学习者，后面的步骤适用于定量学习者。

表 6.4　引入一个新的数学概念时从归纳到演绎的方法

为定性学习者提供的归纳方法的步骤	✓ 从语言学角度解释概念 ✓ 介绍支持概念的一般原理或法则 ✓ 给学生提供使用实物材料调查的机会，并发现原理和概念之间的联结证据 ✓ 使用实物材料为证明概念提供大量具体事例 ✓ 让学生与其他同学讨论如何证明和应用概念 ✓ 演示说明这些个别经验如何整合成能够应用于所有例子的一般原理或规则

续 表

为定量学习者提供的演绎方法的步骤	✓ 重新强调与概念相关的一般原理或法则 ✓ 演示一些特殊的例子是如何遵循一般原理或法则的 ✓ 让学生陈述原理并列出符合此原理的特殊事例 ✓ 要求学生解释概念中所包含的语言元素

143

3. 数学中的教学选择

正如我们在前几章所讨论的,具有讽刺意味的是,虽然人生来就具有数感,但是许多人认为自己没有能力学习或是记住基本的数学运算。这种无能的感觉在高中课堂中尤其明显,并且成为学生与教师都需要去克服的极大障碍。当然,学习动机与这样的态度有很大的关系,大量研究表明,与其他学科一样,在数学学科中,低动机同样会导致低成就。

多年来,教育学者已经探索出用以帮助激励学生达到高成就水平的策略与模式。南利(Nunley,2004, 2006)在基于认知神经科学的研究基础上,开发出一个以学生为中心的教学方法。她的模型叫作分层课程,由三个不同的教学层次组成,可以增强学生的动机并鼓励复杂的思考。

南利提到,致力于使教学与人脑的特点相契合的数学教师有三个共同的基本目标。首先,他们希望让学生在学习过程中投入情感,从而增强学习的动机。第二,他们希望使学生们对数学技能的掌握达到熟练的水平,从而能够在实践中应用技能,并创造出意义。第三,他们寻找方法以激励高水平思考,并将新的学习与已有知识以一种复杂的方式联结起来。吸引学生投入是第一位也是最重要的,因为如果没有投入和动机,教师就无法开始实现其他两个目标。提高学生的动机和参与度只需要教师在课堂中加入一件简单的事——选择。

南利认为,缺乏动机仍然是学生不能够成功学习数学或其他学科的主要原因之一(Legault, Pelletier & Green-Demers, 2006; Pintrich, 2003)。在数学课堂中,学生可能会感觉他们缺乏获得成功的能力,或者可能感觉自己无法坚持到成功的那天,或者仅仅是厌倦和无法专心于学习。许多学生缺乏动力是由于习得性无助——感觉不管怎么努力也不能成功,所以他们找不到继续尝试

> 分层课程由三个不同的教学层次组成,可以增强学生的动机并鼓励教师进行复杂的教学。

的理由。其他缺乏动机的学生仅仅是在学习任务中找不到个人价值(Bigelow & Zhou, 2001)。无论是怎样的原因,它们都有一个共同点:没有自主动力的学生往往不能在学校中获得成功。

南利还提到,为了激发动机,学生必须看到他们的行为和结果之间的关系。这就需要让学生感觉到,在课堂环境中他们有一定的操控感,随着操控感而来的是责任感。但遗憾的是,传统的以教师为中心的专制性课堂很少激发学生的责任感(Ryan & Deci, 1999)。如果教师包办了所有关于规则与指令的决定,学生则不需要担负任何责任。

144

因此,我们看到教育已转变为以学生为中心的教学。在以学生为中心的课堂上,通过差异化的教学让学生能够做出一些选择和决定。研究表明,在以学生为中心的课堂里,学生的成就更高,标准化测验成绩更好,课堂管理的问题更少,与学习任务相关的行为更多,并且辍学的更少(Pekrun, Maier & Elliot, 2006)。因此,数学教师希望创造让学习者积极性更强的课堂,因为上进的学习者会积极地处理信息,对材料有更好的概念性理解,并显示出更强的处理问题的能力。这样的做法与目前我们所了解到的当今学生想要积极参与学习过程的情况相符合(Sousa, 2006)。

对课程进行分层的三个步骤

分层课程是一个因材施教的简单方法,鼓励学生在更高层水平思考,为学生将来在成人世界中做决定做好准备,并保持他们对学习的责任感。通过三个简单步骤可以将任何教案都转化为一个分层单元(Nunley, 2004, 2006)。

✓ **第一步:增加一些选择**。提供选择能够立即转变一个课堂。提供选择可以将缺乏动机的学生转变为动机明确的学生,维持学生的注意力并让学生体会到操控感。提供选择是以学生为中心的因材施教课堂的核心。习惯性地,数学教师认为他们的学科是一门严谨并连贯的学科,几乎没有可供学生选择的空间。但即使是在结构十分严谨的课程中,依然存在着一些让学生选择的可能。

- 提出你的教学目标,并就如何达成这些目标为学生提供 2～3 个可选择的任务。并不是所有的目标都要通过选择进行教学,但可以尽可能多地提供。可选择的内容包括教师讲座、同龄小组教学、动手操作项目,或者独立学习。

- 例如，如果你的目标是让同学们能够确定三角形的面积，你可以就这个主题提供一个黑板板书，允许学生自己做一些练习，进行小组讨论，玩一些练习这个概念的电脑游戏，或是通过教具完成一个任务。
- 有一个提议值得考虑，就是让你的课程成为选修课，并提供一定的奖励分数。告诉学生，他们可以选择听你讲课（直接教学），或者做其他单元的功课。你会发现，几乎所有的学生都会选择听课。这是他们自己的选择，而不是教师下的命令，这一点改变了他们对学习任务的看法，使他们更加专注。

145

√ **第二步：让学生为学习负责**。在我们传统的评分系统中有一个弊端，就是课堂中的评分存在很大的差异。一些教师仅根据一个技能的练习来给分，而另一些只根据作业给分。当然，还有一部分分数最终将由考试中的表现来定。由于评分方案几乎是一个教师一个样，因此作业的得分常常占了很大比重。这意味着，学生们不需要真正学多少就可以获得足够及格的分数。事实上，由于课堂作业和家庭作业可以得到这么多分，以至于许多学生从来不理解做作业的真正目的其实是从中学到一些东西。他们说："我做了，难道不算分？"

- 分层课程的一个关键就是把分数奖励给对学习目标的真正学习，而不是布置的作业。比如，如果我们的目标是让学生学习如何确定三角形的面积，那么就根据学生能否完成这个作业给作业评分。无论他们是选择做书面作业还是一个操作练习，或是一个电脑游戏都无关紧要，重要的是他们完成了目标。这可以通过口头答辩、小组讨论或突击测试来检查。把问题列在索引卡片上，这样不同班级的同学都可以随机选择。两三个简单的问题就能很轻易地检测学生对技能的掌握情况。把分数奖励给对技能的掌握，而不是为了最终目的而选择的途径。

√ **第三步：鼓励高水平的思考**。与脑相适应的学习有一个要素，就是帮助学生建立与新信息之间的复杂联结。发现关系，将新旧知识挂钩，在记忆网络内交叉关联，这些都是真正学会的关键。分层课程鼓励教师通过将教学单元划分成三个层次而使学习变得更加复合：(1) 基本的机械记忆信息；(2) 信息的应用和操作；(3) 现实问题的批判性分析。我们不把这些称为第 1 层、第 2 层和第 3 层。因为这种学习的复杂性将嵌入到学生的每一实际等级中，所以我们把这些层次称为 C 层、B 层和 A 层。

- C 层由布鲁姆分类(Bloom taxonomy)中所有低水平的目标组成。该层包括机械学习和具体事实，所有学生都从这层开始。即使是最高层能力的学生也需要增加他们当前的知识储备，所以整个班都要从这层开始。
- 学生完成了 C 层后，他们将移至 B 层，这一层要求他们把在 C 层中学习到的新知识和原有知识联系起来。这层包括的任务有解决问题、应用、展示所掌握的程度，或是独特的创造。这一层的目标是将新知识与旧知识在大脑中联结成一个更为复杂的图像或网络。在该层，跨学科任务起到了很好的作用。圆满完成 C 层和 B 层的学生可以获得这个单元的 B 等级。

146

- 最后，为了形成对于成人世界问题或当前事件的看法，A 层要求学生将他们所学的事实和基本信息与头脑中更为复杂的概念，例如价值观、道德、个人反思等融合。这一层要求运用批判性思维，并为学生成为现实世界的投票人和决策者做准备。许多教育者指出，这个部分最为重要。如果学生成功完成这个层次将获得本单元的 A 等级。

我们希望所有学生都完成这三个层次。许多学生也许不能充分地掌握一项技能，或者不能够处理 A 层中复杂的问题来获得足够的分数达到 A 级或 B 级。尽管如此，所有人都必须尽力触及这三个层次。我们在为这些孩子进入成人世界做准备，这个世界要求他们收集并处理信息，依据这些信息做出社会性的决策。因此，所有学生都需要练习这些类型的思维。起初，教师帮助学生通过所有层次，这样他们能够体验成功并了解过程。随着时间的推移，各个单元可能会在他们的数学结构上留下更多的开放空间，使得学生一旦准备充分便可以自由地在不同层次间穿梭。

分层课程单元的例子

✓ 八年级的分层课程单元

内容：理解图表和数据分析

目标：

- 为解决问题收集、整理、分析并显示数据(包括散点图)。
- 为这个散点图制作一个拟合直线；解释这条直线与问题相关的意义，并做出预测。

● 识别出误用的统计和数据。

C层次：

(1) 每天听教师“板书”为主的课程(5分/天)。

(2) 完成书本练习题：每个部分选择一题(每题10分)。

a. 第235页，第1到20题中，任意选择7个问题。

147

b. 第238页，第1到21题中，任意选择7个问题。

c. 第240页，第1到17题中，任意选择6个问题。

(3) 选择一个实验分析项目，和1～2位同学计算平均数、中位数、众数和范围，并画出线性回归线。回答预测问题(每题10分)。

B层次：选择一题(20分)

(1) 2010年汽油价格会是多少？调查10年来汽油的历史价格，绘制数据图，并根据数据做出你的预测。

(2) 2010年学校午餐价格会是多少？与上一题中一样，调查10年的历史价格。

(3) 散点图的价值是什么？上网查找30个使用散点图来进行预测或解释形势的网站。根据你的发现，汇编一个带有注解的参考文献。

A层次：选择一题(20分)

(1) 你是否认为政客们误用了统计数据？如果是，找出3～5个证据来支持你的论断，如果你的回答是“否”，选择另一题。

(2) 媒体常常会误用图表和数据。找出3～5个例子，并作为一名受过教育的消费者提供相应论据。

(3) 明年会有多少人在高速公路上死亡？查找资料来支持你的答案。我们的法律是否有助于减少高速路死亡率？我们还能做些什么？

√ 微积分的分层课程单元案例

内容：介绍导数

C层次：

第一天　主题：定义导数和函数求导规则

(1) 讲课(5分)。

(2) 练习：选择一题(5分的测验)。

a. 习题集3.1，第1～9题。

b. 进行我们“微积分之旅”软件中的导数单元。

第二天　主题：三角函数的导数。

(1) 讲座(5分)。

(2) 练习：选择一题(5分测验)。

a. 习题集3.2,第1～10题。

b. 查找这个主题的教学网站。创建一个迷你课程,并为两位同学教学。

第三天　主题：链式法则。

148

(1) 讲座(5分)。

(2) 练习：选择一题(5点测验)。

a. 习题集3.3,第1～12题。

b. 制作教授链式法则的海报,并为两位同学准备迷你课程。

B层次：选择一题(10分)

(1) 写一份关于潮汐的一页纸的图书馆查阅报告,并解释导数是如何用于预测潮汐的涨潮和退潮。

(2) 写一份有关导数在商业交易和公司风险管理中实际应用的一页纸的图书馆查阅报告。

(3) 解决三个问题：

a. 一个20 cm×28 cm的矩形纸,在纸张的每个角剪掉一个大小一样的方块,然后将剩余的部分折叠成一个没有顶的盒子。需要剪掉多大尺寸的方块可以保证盒子的体积最大?

b. 要制作一个体积为V的圆柱形的苏打水金属罐。如果要使用最少的金属制作这个罐,那么金属罐的直径和罐的高度比应该为多少？假定所使用金属的厚度一致。

c. 诺曼窗是一种下面为矩形,上面为半圆的形状,它仍然是一种流行的建筑风格。假设这个窗户的周长为300 cm,如果要让这个窗户的面积最大,采光最好的话,半圆的半径应该是多少?

A层次：任选一题。寻找并总结与你选定的主题有关的三个研究。以研究为基础写两段观点(15分)。

(1) 小行星A2004 MN4正在向地球行进,预计将在2029年撞击地球。撞击的日期一直在变动。他们是如何计算这个事件的？我们需要担心吗?

(2) 在2005年卡特里娜飓风袭击新奥尔良时，飓风登陆时的潮汐位置是如何对新奥尔良造成破坏的？假如潮汐位置改变，损害会增多还是减少？沿海风暴的潮汐位置对于做出是否疏散决定有多大的影响？

你还要完成一个关于本单元的测验，分值为50分。

更多有关南利的分层课程的内容，参见本书**资源**部分。

149

4. 图表组织

我们在第五章中提到，当今的青少年成长于一个视觉社会，他们被电视、电脑、电影、便携DVD机，以及带有屏显图像的手机所包围。因此，在所有数学课堂上使用视觉工具具有重要意义。图表组织是视觉工具的一种，它不仅可以吸引学生的注意力，同时还是促进理解、提升意义和维持注意力的重要工具。

在书籍和互联网上有许多不同类型的图表组织方式(参见本书**资源**部分所列的网站)。以下呈现的只是由格雷厄姆和梅耶尔(Graham & Meyer, 2006)为高中数学教学开发的一些样例，经作者许可转载。

150

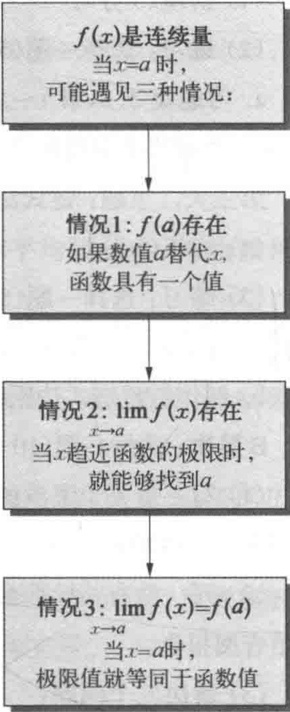


图 6.4 如何判断一个函数是否为连续的

来源：获准改编自 Graham & Meyer, 2007。

151

截距式
$f(x)=a(x-b)(x-c)$

举例
$f(x)=0.5(x+5)(x-4)$

轮到你
$f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$

找出并画出x轴上的截距和顶点
$x=\frac{b+c}{2}$

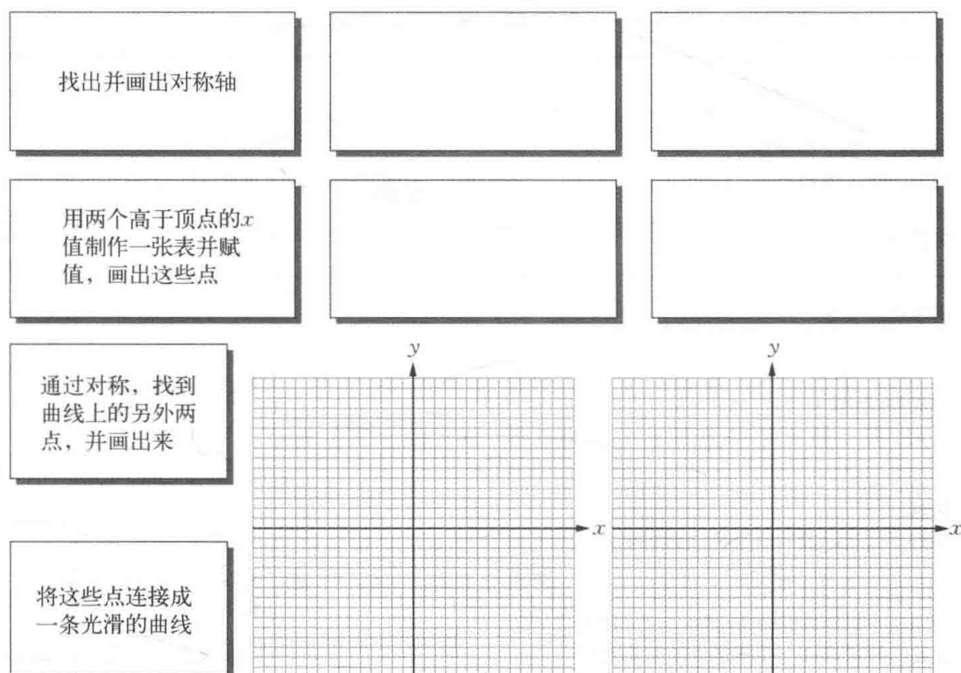


图 6.5 如何绘制一元二次方程

来源：获准改编自 Graham & Meyer，2007。

152

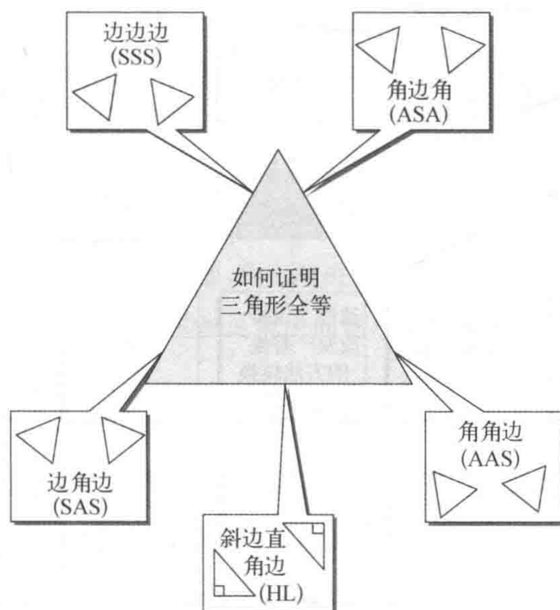


图 6.6 如何证明三角形全等

来源：获准改编自 Graham & Meyer，2007。

153

表 6.5 如何写一条直线的方程式

已 知	举 例	轮到你
斜率和 y 轴上的截距 使用斜截式方程： $y = mx + b$ 替换 m 和 b	斜率 = $\frac{3}{4}$，y 轴截距 = −2	斜率 = $-\frac{1}{2}$，y 轴的截距 = 5
斜率和一个点 用点斜式方程： $y - y_1 = m(x - x_1)$ 替换 m，x_1 和 y_1 求 y	斜率 = −3，点 = (−2，4)	斜率 = 4，点 = (−6，−4)
两点 用斜率公式以及两点坐标找到斜率。 $m = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 利用这个斜率和给定的其中一点，按照上述已知**斜率和一个点**的方法写出直线方程	两点分别是(−6，3)和(2，−7)	两点分别是(−9，−2)和(1，−8)

来源：获准改编自 Graham & Meyer，2007。

154

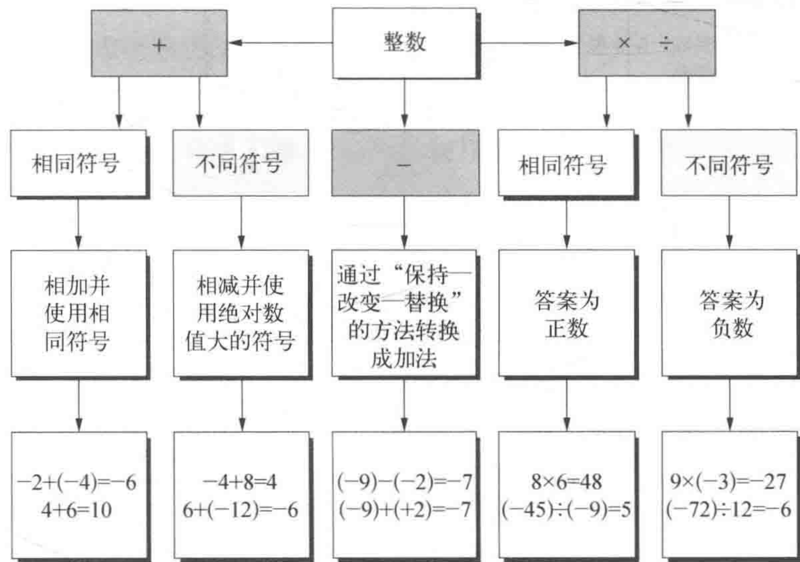


图 6.7 整数法则

来源：获准改编自 Graham & Meyer，2007。

5. 解读文字应用题

即使一些精通解决数学表达式问题的学生，仍然有可能在理解文字应用题的意思上存在困难。巴顿和海格玛（Barton & Heigema，2002）提出，数学教科书的作者在编写时并不总是按照学生们在语文课上学到的写作原则。比如，学生们学到的是，作者的主要思想常常出现在每段的起始句。然而，在数学问题里，主要思想常常出现在最后一句。下面是一个典型的例子：

比利要将蓝色、绿色、黄色的弹珠按颜色进行分类，他总共有 58 个弹珠。蓝色弹珠的个数是绿色的 2 倍，黄色弹珠又比蓝色的多 3 倍。那么，比利有每种颜色的弹珠各几个？

在学生们读到问题的关键句"比利有每种颜色的弹珠各几个"之前，他们必须先耗费时间读大量细节。老师可以运用一些针对"题目在问什么"和"如何选择答案"的策略，帮助学生理解应用题。

SQRQCQ 程序

√ 有一种方法叫作 SQRQCQ，它可以通过 6 个步骤帮助学生了解应用题的重要信息（Barton & Heigema，2002）。这个策略旨在帮助学生思考题目在问什么和选择解决问题的方法。这六个步骤为：

- 浏览（Survey）：快速阅读问题，得到一个整体的了解。
- 提问（Question）：试问这个题目需要什么信息。
- 阅读（Read）：再次阅读问题，确定解决它所需的相关信息、事实和细节。
- 提问（Question）：试问哪些是解决问题所必须做的。"必须完成哪些运算，以什么顺序进行？"
- 计算（Compute）：计算或者构建解决方案。
- 提问（Question）：试问解决过程是否正确，答案是否合理。

值得注意的是在这个策略中，需要特别告诉学生重读题目。学生常常在一次快速阅读后，依赖他们的工作记忆来记住所有相关信息。重读问题（复述的一种形式）能够提高在工作记忆中发现、加工和保持重要细节的可能性。

156

6. 让数学对青少年有意义

正如第三章中提到的，让学生发现他们所学知识的意义十分重要，因为意义是大脑用来确定信息是否进入长时存储的标准之一。帮助学习者发现意义的一个方法是将他们正在学的知识与日常生活相联系。但是在中学数学课堂里，学生常常很难看到数学在日常生活中的实际应用。下面是一些关于如何将数学概念与常见经验建立有意义联结的建议。

概率

√ **决定胜算**。很多人赌博、买彩票、玩股票、玩足彩，或者跟朋友一起玩扑克，他们凭运气投资，相信自己可以获得意外的回报。概率的数学原理能够告诉我们获胜的概率，从而帮助我们决定是否要冒风险。

我们如何确定概率？假如现在水果篮里有 12 个苹果，5 个是红的，7 个是绿的。如果你闭上双眼，伸手去篮子里抓 1 个苹果，抓到红色苹果的可能性有多少呢？12 个苹果里有 5 个是红的，所以你得到一个红苹果的概率是十二分之五，或者写成分数 5/12，也就是大约 42%。或者，假如你要在两所大学中选择一个，一个在得克萨斯州，一个在康涅狄格州。你用投硬币来决定。那么硬币朝上或是朝下的机会是一半对一半，或曰 1/2，两种情况的概率都是 50%。

那么如果你买一张国家彩票，中奖的概率有多少？

√ **赌博能成功吗？大轮盘赌赔的概率**。在赌场里玩大轮盘是个好主意吗？事实上，赌场会比玩家赢得多。下面说说为什么：大轮盘分成 38 个数字槽，2 个是绿色，18 个是红色，还有 18 个是黑色。当轮子开始转动后，放一个球到它的外圈，当轮盘停止，球将掉入 38 个槽的其中一个。玩家认为球会掉到哪个槽就给这个槽下注。如果你赌球掉到 18 个红槽里的任意一个，你赢的概率就是 38 分之 18，接近 47%。如果你赌了某个特定的数字，比如数字是 10 的红槽，那么你赢的概率就会降到 1/38，差不多是 2.6%。

概率确保了在大轮盘这个赌博游戏中，即使赌场不是每次都赢也能赚钱。还记得这里分别有 18 个红色和 18 个黑色的槽，另外还有 2 个绿色槽吗？只要球掉到任意一个绿槽里，赌场就会赢得压在轮盘上的所有钱。所以我们说，下注球掉到红色或黑色槽，可能是在大轮盘中最保险的一个赌注，因为你有 18/38(47%)的胜算，但你还是有 20/38(53%)输的可能性。

157

计算买一辆车的利息

✓ **贷款买车时，你实际要付多少钱？** 了解利息可以帮助你管理好财务，并帮助你确定借钱去买车时将要花费多少。利息是一种比率，比如 3%或 18%。你借的钱(本金)乘以利率就得到你需付的贷款利息。

假如你想买一辆 $ 10 000 的二手车。汽车销售员说经销商可以以 8.4%的利率贷款给你买车，估计每个月需要付 $ 200，持续五年。那么在贷款期间你实际上需要付给经销商多少钱？这是一笔好交易，还是需要货比三家？假如银行可以提供四年期 9.0%利率的贷款，哪个更好？

指数变化/级数

✓ **人口增长**。近几个世纪以来，地球上的人口数量急剧增长。我们这个星球上目前的人口数比三百年前增加了近 10 倍。人口增长为何会变得如此之快？想象一棵家庭树。顶端是父母两人，下面是他们的孩子，再下面是他们孩子的孩子，以此类推可以推出下面的好几代人。只要这个家庭持续繁衍，这棵树就会不断增大，一代大过一代。世界人口也是如此。

人口的新成员最终都会繁衍出其他的新成员，因此人口数随着时间的推移不断增加。但人口增长不会永无止境，生物的生存受到可利用的食物、水、土地以及其他重要资源的限制。一旦这些资源枯竭，人口增长就会停滞，或由于疾病和营养不良而导致人口下降。

人口增长的速度有多快？要对未来 50 年世界人口的增长进行一个合理的估计，需要调查这段时间内人口的出生率和死亡率。如果这段时间世界各地的出生率和死亡率保持不变，人口增长可以通过一个相当简单的公式确定。但是各国和各时间段的出生率和死亡率不可能保持不变。因为在某个特定的时间，疾病或灾害会引起死亡率的增加，而繁荣的经济则可能意味着出生率的增加。

158

地球人口的增长速率正在减缓。整个 20 世纪 60 年代，世界人口以每年 2%的比例增长。到 1990 年，比例降到了 1.5%，预计到 2015 年将降到 1%。计划生育方案、人口老龄化，艾滋等疾病的影响都是比例下降背后的因素。即使人口增长率如此之低，人口数目仍旧惊人。你可以估算出到 2015 年地球上的人口将有多少吗？到 2050 年呢？地球能否负担得了这些人口？什么时候将达到我们资源的极限？这些将如何影响你子孙的生活方式？

✓ **这份工作是否是一笔好交易?** 想赚到百万美元吗? 我们来审查一个雇员和雇主签署的想赚到百万美元计划的合同。首先让我们签订一个合同。

聘用合同

雇员__________(写上你的名字)

雇主__________(同意这些条款的公司)

协议要点

1. 雇员每周工作5天。
2. 雇员将在每周五获得周薪。
3. 雇员最短聘用时间为30个工作日。
4. 酬劳安排如下:
   - 第一天的基本工资是1便士。
   - 随后每一天的酬劳将是前一天的两倍。

签名 ________(雇员)

签名 ________(雇主)

日期: ____________

这是一个好协议吗? 猜一下这个雇员在30个工作日内可以赚到多少钱。我的猜测: $ ____________。根据最低工资,计算一个人工作6周(每周40个小时)能赚到多少? 最低工资水平(税前)为 $ ____________。现在让我们一起计算一下这份合同能获得的酬劳,并看看雇主和雇员哪个更赚。第一周工资如下:周一,1美分;周二,2美分;周三,4美分;周四,8美分;周五,16美分,这个星期一共盈利31美分。看上去不多? 接下来请继续计算之后五周里每天的工资。

159 这里有一个公式,通过这个公式我们可以计算出某一天的工资,而不需要一步一步的计算。这是一个几何级数的例子,在一个数列中,任何数字与它前一个数字的比是一个固定的量,这个量叫作公比数。比如,在1,2,4,8,16……这样的数列中,他们的公比数是2。一个几何级数可以这样描述:级数的首项为 X(在这个例子中 $X=1$ 美分),公比数为 R(这里 $R=2$),在一个有限序列中,项目数为 n,第 n 项的几何级数可以用一个给定的公式来表达:$X_n = X_1 R^{n-1}$。

有关这份工作的一些问题:

(1) 将赚的金额总数和你最初的猜想比较,结果如何?

(2) 假如你想买辆车,哪一天你可以用现金支付你的车钱?

(3) 你能否发明一个计算每天工资的公式?(答案:每天的工资 = $2^{n-1} \times X$,其中,n = 你已经工作的天数,X = 你第一天的基本工资)

这个计算原理也可以用到社会事业上。解决社会问题的努力常常从极少一部分负责该问题的个人开始。假如某一天你告诉一个人你所面对的问题,一对一的诉求将更有效地说服听众。第二天,你们俩就可以接触另外两个人;第三天,你们四个又将接触另外四个人;第五天,你们八个人将说服另外八个人,以此类推。到了第 12 天,将有 2 000 多人知道你的事,第 30 天,将有超过 10 亿的人讨论与你密切相关的问题!虽然你个人仅仅告诉了 30 个人。通过这个方式,现在你应该可以了解到毫无根据的流言为什么能传播得如此之快。

比率/比例

✓ **烹饪挑战:改变食谱**。食谱是将相互关联的配料混合在一起,在数学里,两个量之间的关系叫作比率。如果一个食谱里需要一个蛋和两杯面粉,蛋和面粉杯数的关系就是 1 比 2。用数学语言来说,这个关系可以写成两种形式:1/2 或 1∶2。

所有的食谱都有一定的可供使用的人数或者一定食物量的限定。打个比方,假如你有一个能做 2 打饼干的配方,当你想要做 1 打或是 4 打饼干时该怎么做?了解如何在保持比率不变的情况下增加或减少产量是烹饪的一个有用技巧。

看下面的饼干配方:　160

1 杯面粉	1/2 勺小苏打
1/2 勺盐	1/2 杯黄油
1/3 杯红糖	1/3 杯糖
1 个鸡蛋	1/2 勺香草
1 杯巧克力豆	

这份配方可以做出 3 打饼干。如果你想做 9 打饼干,你就必须增加配方里所有配料的数量,同时确保所有配料之间的关系保持一致。要做到这个,你就需要了解比例。当有两个相同的比率时,就形成一致的比例,比如 2∶4 和 4∶8。两个不相同的比率,如 3∶16 和 1∶3,则不成比例。比率必须相等。

在饼干的配方中，你需要建立一个确保能做出 9 打的正确比例。通过建立这个比例，先弄清做 9 打饼干需要多少面粉：

$$\frac{1(\text{杯})}{X(\text{杯})} = \frac{3(\text{打})}{9(\text{打})}$$

为了确定 X（新配方中需要面粉的杯数），将数量像这样相乘：$X \times 3 = 1 \times 9$，或是 $3X = 9$。等式两边同时除以 3 就可以得到 X 的值。结果得到 $X = 3$。要把配方扩展成做 9 打饼干，你就需要 3 杯面粉。根据同样的步骤，我们可以确定做 9 打饼干所需要所有配料的数量。

这只是几个能够帮助同学们将看似抽象的数学运算变得更有趣更有实践性的例子。如果需要更多的例子，可以在参见本书**资源**部分所给出的几个网站。

161

三、下章预告

虽然有些学生在学习数学时只是偶尔遇到困难，他们通常能够找到克服困难的方法，但有些学生即使在简单的数学运算上也会一直存在困难。下一章我们将讨论教师如何才能识别一直存在困难的学生，以及怎样做才能帮助他们学习数学概念。

162

四、本章反思



在此页简略记下要点、想法、策略和资源，以备日后思考。此页是你的个人日志小结，它能帮助你日后回忆。



第七章　认识和解决数学学习困难

163

> 不要为你在数学上遇到的困难烦恼，
> 我向你保证我在数学上遇到的困难要大得多。
>
> ——爱因斯坦(Albert Einstein)

有些孩子擅长数学计算，而有些孩子即使付出了很大的努力，依然感觉学习数学很困难。在过去的三十年里，感觉数学学习困难的学龄儿童的百分比在稳步增长，为什么会这样呢？是人脑执行计算的能力减弱了吗？如果是这样，原因是什么呢？是因为现代技术的发展促使计算从脑神经元转移到了便宜的电子计算器，脑的计算练习因此而减少了？是什么使得小孩学不好数学？这些问题的答案很复杂，但是至少应注意以下两个方面。

164

(1) 我们需要分清不理想的成绩是由于指导不当或其他环境因素，还是由于自身认知能力不足引起的。

(2) 数学到底是以什么方式被教授的？教学方法完全可以决定某种认知缺陷是否真的是能力缺失。例如，一种教学方法强调概念的理解而不强调学习过程和数学算式(NCTM，2000)。另一种教学方法，正如加利福尼亚州教育部的标准(California Department of Education，1999)提到的，强调过程和算式。在第一种教学方法下，一个对提取数学算式有困难的学生不会被认为是学习能力缺失，因

为这种方法不强调记忆信息。然而在第二种教学方法下，这种困难将被认为是严重的能力不足。

在数学学习上有困难的学生数量的增加，激发了研究者对于大脑怎样进行计算，以及可能引起数学学习困难的原因方面的研究兴趣。在这一章里，我所说的数学困难是指那些数学成绩处于平均水平较低范围内的学生，不论他们的困难是由环境引起的还是认知缺陷引起的。值得注意的是，由于数学成绩测验包括许多类型的题目，因此学生有可能在某些领域表现为平均水平，但是在其他领域表现困难。

一、发现数学学习困难

和任何一种学习困难一样，困难发现得越早，对学习者越有利。研究表明，对存在计算困难的一年级学生进行较大强度的辅导后，他们学年末的数学成绩会有显著提升(Fuchs et al.，2005)。当然，上述情况的关键在于：较早的发现使得干预活动能够尽早实施。

1. 确定问题的性质

对于教育者来说，对待数学学习困难学生的首要任务是确定问题的性质。显然，环境因素引起的困难与发展因素引起的困难所需要的干预方法不同。在数学测验中成绩不理想也许意味着问题的存在，但是测验不能提供导致成绩不理想的准确原因。标准化测验，例如《布里根斯基本技能综合评定量表(修订)》可以较为准确地检测出导致问题的原因，如数数、算式或过程执行方面的缺陷。

165

针对学习困难学生，教育者应当检测他们对于学习数学运算必备技能的掌握程度。他们的哪些技能是较弱的？我们可以为此做些什么？还应当关注数学课程，从而决定应当教多少数学知识，以及教师应该使用怎样的教学策略。我们试图传授的知识是否太多？我们是否充分利用了各种可视化和可操作的教具？我们是否在发展学生的优势而不只是盯着他们的不足？

必备技能

深入了解数学课程与教学，可以揭示教师是如何教授这些内容的。一个好

的参照系是，认识到在理解和应用更复杂的数学运算法则之前，学生需要掌握一定的技能。数学教育者提出要成功学习数学，以下七项技能是必备的（Sharma，2006）：

（1）遵循顺序；

（2）识别模式；

（3）合理猜测数量、大小、量级和总数，从而进行估算；

（4）在大脑中呈现可视化图像并操作图像；

（5）有良好的空间定位感和空间组织能力，包括能辨明左右、罗盘方向，以及垂直和水平方向；

（6）能够进行演绎推理，即能从一般推理到具体实例，或者从一个前提条件得到一个合乎逻辑的结论；

（7）能够进行归纳推理，即不需要有意识的注意或推理而获得对事物自然的理解，能够在不同情形以及过程和概念之间的内在关系中轻易发现规律。

举例来说，不能遵循顺序操作每个步骤的学生理解多位数除法会有一定困难，因为多位数除法需要按照一个特定顺序记住多个不同步骤依次操作。首先是估算，然后是做乘法，比较后相减得到一个余数，如此重复这一循环……对顺序理解有困难的学生不确定哪一个数字要放在除法算式里，或哪一个数字要作为分子写在分数上方。通过除法的问题也可以揭示其他有关顺序的困难：首先看到右边的数，然后在上方记录一个数，再将斜角线上的数相乘，将乘积记录在下面，同时注意数位，然后相减得到一个余数，等等。 166

2. 诊断工具

低年级的评估

当然，小学低年级的教师常常是通过自己对学生表现的观察来判断学生是否在数学上存在问题。尽管老师的观察结果是很有价值的，但也应当考虑采用其他评价方法。研究表明，在检测和预测学生掌握数字操作和基本运算的程度时，有多种可靠的检测手段。表7.1总结了可用于检测学前和一年级学生是否存在数学学习困难的筛查测试（Gersten，Jordan & Flojo，2005；Griffin，2002）。

表 7.1 幼儿数学教育中可选择的筛查措施及其说明

测 量	说 明
数字广度	学生向前或向后重复一串数字
数量比较	学生选择四个以视觉或听觉呈现的数字中最大的一个
补数	学生能口头添补 0～20 之间缺失的数
数字知识测验	数感的基本测试(见第 5 章)
听写数字	学生写下听到的数字
数字识别	学生从打印的数字中找出 0～20 之间的数
数字比较	学生从两个书面数字中找出数量较大的一个

来源：Gersten，Jordan & Flojo，2005；Griffin，2002。

167

低年级之后的评估

过去 15 年的研究表明，在低年级之后的阶段，有五个重要的因素影响了数学学习。对于学生在数学学习过程中可能遇到的任何困难，每一个因素都能作为诊断工具发挥其评估作用(Augustyniak，Murphy & Phillips，2005；Sharma，2006)。下面就是需要考虑的五个因素：

✓ **认知意识的水平**。学生将会遇到需要不同认知意识水平的学习环境，这些水平包括从无认知意识到高认知意识。首要任务就是要判断学生的认知意识水平，以及每个学生在完成数学学习任务时采取的策略。这一点不是那么容易做到的，但可以通过以下方法实现：

- 与学生进行个别谈话，观察每个学生用怎样的方法去解决一个数学问题；
- 询问“学生为什么这样想”和“学生用了哪些常规的或非常规的策略”；
- 判断哪些必备的技能是学生已经拥有的，而哪些技能是学生比较缺乏的；
- 判断学生的回答是正确的还是不正确的，并要求学生解释他们是怎样获得答案的。

了解学生的认知意识水平以及必备技能，这将为你选择和介绍新的概念和技能提供重要信息。

✓ **数学学习风格**。正如第六章中所讨论的，研究者们认为每个人都以不同的方式加工数学，有的人以定性学习为主，有的人以定量学习为主，不同的学习

风格就像是排列在从定量到定性的一个连续体上。你也许会记得我在前面说过，以定量为主的学习者更喜欢有确定数值的实物，运用程序性方法解决问题，并注重演绎推理；而另一方面，以定性为主的学习者则倾向于使用整体直观的方法寻找概念和过程之间的联系，他们是社交型学习者，注重数学空间视觉方面的信息。

因为在数学课堂中这两种学习风格都会体现，所以教师需要融合多种教学策略。如果仅仅顾及一种学习风格的学生而忽略其他学习风格的学生，其结果必然导致很多学生数学成绩不理想。事实上，有些学生甚至会出现数学学习困难的症状。

√ **数学的语言**。数学语言有自身的符号表达、语法以及专业术语，如果学生不能理解数学语言，就会出现数学学习困难。解决文字应用题就需要将英语转换成数学语言的能力。只有当学生能够识别用于表述每个数学题的文字语言，这种转换才有可能成功。例如，如果一个老师要求班上学生解决如下问题“从 76 个中拿走 8 个”，学生依据陈述语言的顺序，很容易写出正确式子“76 - 8”，但如果教师说“将 8 个从 76 个中拿走”，学生就可能按照语序，误写为“8 - 76”。因此，学习辨别和正确转译数学语言对学生成功解决数学问题是非常重要的。 168

语言也可能以其他方式成为一种障碍。对于基本数学运算，学生可能只学习了有限的词汇量，例如“加”和“乘”。当学生遇到“和”与“积”这种表达时，他们可能就会陷入困境。为了避免这种问题的出现，在阐述问题时尽量使用多个同义词：“将 6 和 5 相乘，可以得到 6 和 5 的乘积，6 乘以 5 得到乘积 30。”

√ **必备技能**。前面提到七种成功学习数学的必备技能的本质都是非数学的。然而，在理解基本数的概念以及学习数学运算之前，这七种技能都是必须掌握的。你应该对每个学生对这七种技能的掌握程度进行评价。

在评价过程中，考虑使用下面的表格（见表 7.2）。在评价学生的每一项技能水平以后，分析结果并拟定行动方案来提高学生有待发展的能力。

表 7.2　数学学习必备技能 169

数学学习必备技能概况

学生姓名：________________　日期：________________

说明：分数由低到高为从 1 分到 5 分。学生的某种技能达到某一程度，就在相应数值上画圈。将圈连接起来，获得概况。

续 表

技能					
遵循顺序的能力	5	4	3	2	1
图形识别能力	5	4	3	2	1
估计数量的能力	5	4	3	2	1
在脑中呈现可视化图像以及操作心理图像的能力	5	4	3	2	1
空间定位感和空间组织能力	5	4	3	2	1
演绎推理的能力	5	4	3	2	1
归纳推理的能力	5	4	3	2	1

建议措施及计划：根据目前状况，我们可以采取____在____方面共同努力。

如果学生有 4 项及以上只得 1 或 2 分时，表明他们将会在数学基本概念的学习中出现明显问题。他们需要更多的指导和练习来掌握这些技能，之后才有可能掌握数学内容。

✓ **学习掌握的水平**。怎样判断学生是否掌握了一个数学概念？当然，通过笔试要求学生解决问题是评价学生学习情况的主要措施之一。然而，这种方法实际上测量的只是学生对学习的掌握程度，而不是对于公式和过程的机械记忆程度。认知研究表明，一个人必须达到以下六种水平，才算真正学习和掌握了数学概念：

- 水平 1：将新知识与旧知识和自身经历联系起来（例如：能意识到 3 乘以 4 等于 3 加 3 加 3 加 3，也等于 4 加 4 再加 4）。
- 水平 2：寻找相应的具体材料为某个概念建构一个模型或一种表达（例如：使用可操作的物体，如将积木或硬币摆放为 4 组，每组 3 个，或摆放成 3 组，每组 4 个）。
- 水平 3：通过画图将具体的例子与符号性的图片或表述相联系来说明概念（例如：将动物或者星星等画成 4 组，每组 3 个，或者画成 3 组，每组4 个）。
- 水平 4：使用数字符号、运算符、公式和等式等将概念转化为数学表达（例如：写出 $3\times4=3+3+3+3=12$ 或者 $3\times4=4+4+4=12$）。
- 水平 5：在实际情况或应用题中，正确应用相关概念（例如：解决事先准备好的或者学生创设的应用问题）。
- 水平 6：能够成功地向他人讲解相关概念或者在测试中表达该概念（例

如：口头向同伴或者班上同学解释概念）。

纸笔测验通常只能评价水平6。因此，当学生成绩不理想时，教师可能不知道哪里存在学习困难。通过将各水平分别评价，将有力地帮助教师确定对每个学生的矫正方案。

二、环境因素

没有认知缺陷的学生在算术和数学运算中也可能存在困难。环境因素，例如学生对数学以及教学质量的情感反应，在决定青少年数学学习成就方面具有重要作用。

1. 学生的数学学习态度

在现代美国社会，阅读和写作已然成为衡量一个学生的主要方法。数学能力更多地被视为专业能力，而不是作为一般智力的指标。因此，数学能力欠缺所带来的耻辱感降低了，并被社会接受。只要孩子们听到自己的父母说“我不擅长数学”，就能让孩子们抱有这种社会态度：学不好数学是情有可原和正常的。

> 即使在高标准和利害攸关的测试中，学生对于数学学习的态度仍然没有得到显著改善。

近几年来，学校重点强调提升各个学科领域的标准。同时，“不让一个孩子掉队”行动要求教师对阅读和数学进行利害攸关的评估。虽然有这些措施，学生对于数学学习的态度却始终没有得到显著改善。调查显示，大多数学生（包括喜欢数学的学生）认为犯非数学类的错误比犯数学类的错误更为尴尬（Latterell，2005）。而且，无论在性别平等方面做出多少努力，在数学学习上，高中女生仍然比男生更缺乏自信（Morge，2005）。

171

这些发现是令人不安的，尤其是其他研究表明，学习态度是通过社会力量形成的，它可以预测学生的学业成就。对学习内容抱有积极态度的学生比抱有消极态度的学生更容易取得成就，这是很自然的（Singh，Granville & Dika，2002）。显然，高标准和逐渐增多的测验对提高学生对学习数学的兴趣并没有太大作用，学生没有将数学能力看作是基本的生活技能。如果不改变这种观点，学生将很

难有动机去掌握数学知识，而教师也将继续为这些学生提供特别帮助。

2. 对数学的恐惧(数学焦虑)

发现存在对于学习和数学的焦虑(通常被称作“数学焦虑”)已经很长一段时间了。它可以被描述为一种可能干扰学习和生活中操作数字或解决数学问题的紧张情绪。它可能发生在各种人身上，跨越年龄、种族或性别，也可能在各种地方发生，在家、教室或是在社会。有研究表明，超过60%的成年人都有对数学的恐惧心理(Burns, 1998)。

由于过去或现在课堂上的消极经历，或者仅仅是对与数字相关的活动缺乏自信，各年级的学生都可能产生对数学的恐惧。数学焦虑导致的恐惧有几种类型：或许是害怕不会计算，或许是害怕问题太难，或许是害怕由于缺乏自信而导致失败。在数学焦虑的人群中，对失败的害怕往往会使他们的脑一片空白，从而产生更多的挫败感。对许多学生而言，数学测验的时间限制带来的压力也使焦虑感上升。

通常，患有这种恐惧症的学生对数学概念的理解都是有限的。他们或许主要依赖公式、法则以及运算过程等的记忆，却没有多少概念性的理解，进而对数学产生恐惧。数学恐惧与其他学习障碍一样难以应付，但值得注意的是，这些学生负责计算的神经系统是正常的，他们主要是需要用可能的成功来代替失败的记忆。而另一方面，正如我们在后文将看到的，患有数学障碍学生的神经系统则是有缺陷的，这使得他们在加工数字方面长期存在困难。

172

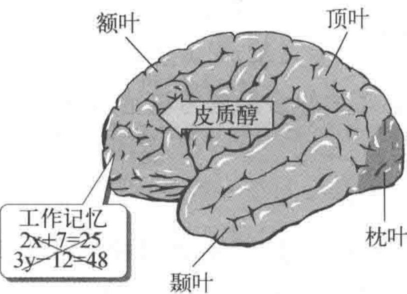


图 7.1 数学焦虑症的脑示意图

数学焦虑症引起了血液中皮质醇的释放，皮质醇使额叶重新调整集中应对焦虑。同时，工作记忆中被认为不相关的学习被干扰或遗失。

不论焦虑来源是什么，焦虑症产生的最普遍的结果就是数学成绩不理想。造成这种不理想结果的一种原因是生理的，任何类型的焦虑都会引起身体释放皮质醇激素到血液中。皮质醇的主要作用就是调整大脑集中应对焦虑源并决定采取何种措施缓解压力(见图7.1)。于是我们的心率加快，其他一些与忧虑相关的身体指征也开始显现。同时，额叶也不再对学习和数学运算感兴趣，因为它得

处理那些可能危及个人安全的事情。结果，学生无法集中注意力完成学习任务，反而不得不处理由心不在焉引起的挫折感。进一步地，这种焦虑的感觉又对工作记忆形成干扰，影响其操作和保持数字及算式的能力(Ashcraft & Kirk，2001)。

缓解课堂中的数学焦虑

希尔兹(Shields,2005)指出，以下五个方面可能以某种方式导致数学焦虑：教师态度、课程、教学策略、课堂文化和评估。我们来分别看一看关于这五个方面的研究结果，以及我们可以采取怎样的措施来缓解焦虑，帮助学生提高数学学业成就(见图 7.2)。



图 7.2 缓解数学焦虑的途径

数学焦虑症是一种普遍存在于学生和成人身上的问题。在学校，通过图中所显示的五个方面采取一定的措施，可以缓解数学焦虑症。

√ **教师态度**。研究证实，教师的态度极大地影响了学生的数学学习态度，它成为塑造数学学习态度的最重要因素(Harper & Daane，1998；Ruffell，Mason & Allen，1998)。下面一些措施可以帮助你和你的学生保持积极的学习态度：

- 呈现一种愉快的教学，展示数学是人类的伟大发明；
- 通过介绍数学对其他学科及社会的贡献，展示数学的价值；
- 布置适当的、有趣的以及有实质意义的任务，以提升学生的信心以及好奇心；
- 关注学习的目标和过程而不仅仅是寻找正确答案；

- 为成功创造机会。研究显示，为了使学生持续投入学习，教师需要为学生创设 70%的成功率，这样使得任务既具有足够的挑战性而需要投入，又容易获得成功(Sowder & Schappelle，2002)；
- 不要相信男性比女性在数学上具有更优越的先天条件，也不要相信要获得数学上的成功，女性必须比男性付出更多；
- 在教学中显示你的自信。教师，尤其是低年级的教师，如果自身有数学焦虑或者缺乏对这一学科的信心，很容易在无形中将这种恐惧传递给自己的学生。

✓ **课程**。对二至八年级数学课程的研究显示，在学科内容中存在大量重复。1999 年国际数学和科学评测趋势(TIMSS)的录像研究分析表明，各年级的数学教学中，有 53%的时间在复习问题，只有 23%的时间在处理新的概念和新的问题(TIMSS，1990)。在低年级，学生通常将数学视为他们最喜欢的学科之一。有了积极的学习体验，学生认为他们有能力学好数学，并相信努力的学习将带来成功。但是到了四年级，由于课程从操作性知识以及具体应用转化为更抽象的思维，数学焦虑逐渐浮出表面。

174

到了中学，课程内容的抽象性让学生认为数学上的成功要靠天生的能力，后天努力的作用微乎其微。到了高中，学习的内容更为抽象，学生意识到光凭记忆不足以学好数学。因此，采取以下措施，有利于帮助学生实现向抽象思维的转换：

- 在小学和中学的数学教学中，在新材料、发现和应用方面投入更多时间；
- 开展活动，不断训练学生将所学知识应用于新想法，并利用数学作为发现的工具；
- 删除数学课程中不重要的部分，确保课程集中在对主要内容的深入理解以及加强技能的培养上；
- 避免年复一年的内容重复，除非这些内容对于学习、应用以及发现数学中新的问题是至关重要的。

✓ **教学策略**。决定学生如何学好数学的一个重要因素是教学质量。研究表明学生在数学上取得的成就和教师在数学上的专业水平是紧密联系的。数学专业水平高的教师，其学生在成就测试中的表现比只接受过有限数学训练的教师的学生要好(NSF，2004)。以“解释—练习—记忆”为中心的教学方法是数学

焦虑的主要来源，因为这种教学注重记忆而不是理解其中蕴含的概念和论证过程。接受这种教育的学生不具备成功解决超出记忆范围的数学问题的能力。教师遵循以下方法，学生在数学课堂上将会更加成功：

- 掌握超越基本理解水平的数学技能；
- 对学生在数学学习上的困惑和挫折表示关注和理解；
- 提出能帮助学生保持学习的问题；
- 降低死记硬背、做机械练习、寻找唯一正确答案以及用电脑和计算器的频率；
- 通过展示与学生生活联系的实际应用来拓展学习意义；
- 组织学生以个人或小组形式寻求解决方法的活动；
- 鼓励学生研究和提出涉及数学的问题；
- 给学生提供用语言、数字、图示、符号等方式展现日常生活情景的机会。

175

√ **课堂文化**。课堂文化可以被定义为常规引导课堂互动的规范和行为。没有讨论机会的结构化、死板的课堂可能会成为数学焦虑的来源。如果课堂文化总是寻找唯一的正确答案，那么学生在认知过程中就不会感到获得认可和奖励。课堂文化也可能尤其重视快速回答和计时测验，但过分强调速度不能鼓励学生反思他们的思考过程或者分析他们得到的结果。如果你按照下面的方法去做，数学焦虑可能会降低：

- 创造一个能让学生提出问题、发现学习和发掘观点的文化环境；
- 创造一个让学生敢于冒险而不会由于给出错误答案而感到羞耻的环境；
- 不提倡在反思时用速度作为评价指标；
- 鼓励学生理解他们所学的内容而不仅仅是记忆程序步骤。要记住，理解性（与意义）是大脑用来决定信息是否值得进入长时记忆存储的标尺之一。

费列维林和希金森（Flewelling & Higginson，2001）建议，如果教师不像传统课堂文化那样只注重记忆、得出正确答案、快速回忆或单纯听讲，而是能创设一个指向意义的课堂文化，那么学生就能战胜数学焦虑并发现数学学习是一种充满趣味和成就感的经历。意义建构的课堂和传统课堂一些特点的更具体对比如表 7.3 所示。

176

表 7.3 意义建构的课堂文化和传统课堂文化的对比

传 统 课 堂	意义建构课堂
数学是程序的集合	数学是一种思考方式
操作令人费解的事物	操作可理解的事物
学习材料对于学习者失去意义	学习材料对于学习者很重要
学生是被动的	学生是主动的
由老师验证	由学生验证
真理是已经呈现在眼前的	真理是建构的
为教师所把握	为学生所把握
用教师的语言解释、描述	用学生的语言解释、描述
经常被遗忘，无法提取	能够被记住，可提取
突然出现	渐渐变化而显现
忽视学生的准备程度	关注学生的准备程度
无实验的	实验的
从课堂一开始就呈现	在课程的结束得到发展
依赖记忆手段	很少依赖记忆手段
孤立和肤浅	联系和透彻
遵循程序	开发程序
数学焦虑	获得个人效能感和信心
封闭思想和精神	活跃思想和精神

来源：Flewelling & Higginson，2001。

费列维林和希金森（Flewelling & Higginson，2001）进一步建议，通过学生和老师一起聚焦、参与和体验丰富的学习任务，可以将传统课堂文化转变为意义建构的课堂文化。他们需要了解学习，以及当他们深入参与时体会到的互动看起来和感受起来是什么样的。他们将丰富的学习任务定义为给予学习者机会：（1）利用他们的知识综合性地、有创造性地和有目的性地进行调查，提出问题和实验并解决问题；（2）以理解的方式获得知识；（3）培养成为终生意义建构者的态度和习惯。表 7.4 提供了一个传统学习任务和丰富学习任务的对比，可供教师在数学课堂上实施。

177

表 7.4　传统学习任务和丰富学习任务的对比

传统学习任务	丰富学习任务
为在学校内获得成功做准备	为在校外的成功做准备
只体现数学学习的结果	体现数学和其他学科的学习结果
使用相对较少的技术	提供机会以综合和创造性的方式使用广泛的技术
更人为和脱离具体情境	是真实的和有具体情境的
鼓励记忆和练习	鼓励思考、反思、想象
允许较小范围的操作演示	允许内容广泛的操作演示
通常需要在任务之后补充内容	在任务中提供丰富内容
只允许使用很少的教与学的策略	鼓励使用多种教与学的策略
使教师和学生对任务有距离感	鼓励学生和教师更多地参与学习任务

来源：Flewelling & Higginson，2001。

√ **评估**。测验是学生在任何学科产生焦虑的主要原因，但焦虑在一些由于采用了课程标准和最低能力的利害攸关测验中可能更大，例如数学。由于考试过程中学生没有自由，因此测验常常会摧毁学生的自信，并且不能激发他们的好奇心和创造能力。此外，测验经常用来决定哪些学生可以进入更高级别的学习。也许人们会质疑是否应该用那些不合适的测试技术来确定学生在数学课程中的进步程度，尤其是当这些决定会影响他们高中之后的选择时。你可以通过以下方式减轻由测验引起的数学焦虑：

- 减少课堂测验，不计时。计时测验会增加学生的压力，从而影响工作记忆和长时记忆的加工（Beilock，Kulp，Holt & Carr，2004）；
- 降低测验在确定等级、学生排名以及单一技能测量中的权重；　178
- 评估学生对数学的理解；
- 采用多种评估方法，例如，口试、笔试或演示等；
- 提供关于是否努力而不是是否缺少能力的反馈，使学生对自己拥有进步的能力充满信心（Altermatt & Kim，2004）；
- 以美国国家数学教师委员会的六条《学校数学评估标准》（1995）作为测验的指南。简言之，这些标准认为评估应该做到：（1）包括真实生活的活动；（2）增强数学学习；（3）促进公平；（4）是一个开放的过程；（5）促进对

数学学习情况的有效推断;(6) 是一个连续协调的过程。

研究表明,学生在数学上的表现会随着数学焦虑的减轻而提高(Ashcraft, 2002)。当教师在学科上表现出兴奋和自信,开发了相应的数学课程,使用了有效的教学策略,创设了以发现和探索为中心的课堂,并通过一个有意义和公平的方式评估学生时,教师就缓解了他们的数学焦虑(Shields, 2005)。

三、神经学因素及其他

除了环境因素可能导致数学学习上的不良表现之外,研究者也关注了潜在的神经学层面的原因。几年前,神经学家研究了阅读障碍,并将导致阅读障碍的因素从这些因素导致的结果中分离出来。现在大多数研究者同意阅读能力缺失的主要原因是大脑中负责语言处理区域的损伤(Sousa, 2005)。

研究者在数学学习障碍这一领域遇到的问题是类似的:分清哪些因素是因,哪些因素是果。由于中度数学学习障碍的学生通常有中等偏上的智商水平,而且具备很好的阅读技能,所以导致数学障碍的脑区是区域化或模块化的。换言之,数学学习障碍的神经学因素是限定性的,而且不会影响其他的认知领域。像我们在前面章节中讲到的,已经有相当多的脑成像和案例研究支持数字模块的存在。

179

计算障碍

大约有5%～8%的学龄儿童有严重的数学加工困难(Fuchs & Fuchs, 2002; Geary, 2004),这大约和有严重阅读障碍的学生数量相等。然而,由于我们的社会强调阅读学习的重要性,针对阅读障碍的研究比针对数学障碍的研究多得多。

长期在数学计算方面出现问题的状况被称为"计算障碍"(dyscalculia, 发音为, dis-kal-KOOL-ee-ah)。计算障碍是一种在数概念、数关系、数计算以及估算(对于一个运算的期望结果)方面存在困难的状况。如果是生来就有这种表现,就叫作发展性计算障碍。遗传研究表明,发展性计算障碍是具有遗传性的(Shaley et al., 2001);如果障碍是由于后天大脑创伤造成的,则称作获得性计算障碍。无论是发展性还是获得性,对大多数个体而言,这种障碍是由于特定的基

本数字加工能力不足造成，而不是由其他认知能力的缺陷造成的（Landerl, Bevan & Butterworth, 2004）。有计算障碍的人在以下学习中会感到困难：

- 通过传统教学方式掌握算式，尤其是涉及数数的教学方式；
- 学习抽象的时间和方向的概念，说出时间并记录时间变化以及过去和未来事件的顺序；
- 获取空间定位和空间组织，包括左右定向，看地图，处理机械加工；
- 在需要顺序或者规则的体育运动中遵从指令，在例如纸牌和棋类游戏中追踪选手并得分；
- 按照顺序排序（包括按顺序读数，替换，转换，省略和逆向运算），组织细节的信息，为完成数学计算而记住特定结果和公式。

发展性计算障碍的神经病学基础是儿童先天感数能力的损伤。

发展性计算障碍的神经病学基础是儿童先天感数能力的损伤。他们看不出“两个”或“三个”一组的物体，学会数数的办法跟其他学生不同，他们主要是依赖排序和记忆。通常，他们在记忆数字词的顺序上没有困难，而且他们能将这些数字词与排成一列的物体一一对应。但是即使他们能说出有 4 个物体呈现在眼前，他们对“4”的数量却没有直觉感受。他们不过是自信地认为数数过程会让他们得到正确结果。

180

我们在第二章中已经说明，儿童学会数数后，他们的大脑会迅速地将数字与数量联系起来，也就是说，数字“5”会在大脑中自动产生 5 个物体的形象。但是在有发展性计算障碍的个体中，看到数字之后不会在大脑产生代表数量的形象，这会让使用符号的心算变得非常困难（Rubinstein & Henik, 2005）。然而，这些个体是可以从一堆具体（非符号的）的物体中区别物体数量的。显然，这是符号（数字）导致的问题（Rouselle & Noel, 2007）。

计算障碍可能是：(1) 数量型，即存在数数和计算困难；(2) 概念型，即在将数学过程和空间感概念化方面存在困难；(3) 混合型，即没有能力将数量和空间信息进行整合。

一些简单的测验可用于发现计算障碍的存在。一个常见的测验是反应时间测试，测试中会问被试两个数中哪个更大。由第一章的内容你可以回忆起来，随着两个数之间距离的增大，大多数人会更容易说出哪个数更大，即说出 8 比 3 大

要比说出 4 比 3 大容易得多。但是有计算障碍的人的反应却不是那么迅速，因为他们不能运算。有计算障碍的人必须依赖数数和序列，即从 3 数到 8 要比从 3 数到 4 花费更多时间。

可能的原因

有计算障碍的个体在感数方面存在的困难可能是由于人脑中数字加工脑区的缺陷所致。最近的功能核磁共振（fMRI）研究发现，与正常儿童相比，发展性计算障碍儿童脑中负责估算的脑区被激活部分要少得多。然而，在精确计算过程中，两组人群大脑的激活的部分是相似的（Castelli，Glaser & Butterworth，2006；Kucian et al.，2006）。图 7.3 展示了在估算中，计算障碍儿童与正常儿童相比只有一小部分脑区被激活，但在精确计算中，大脑两半球中被激活的部分相似。

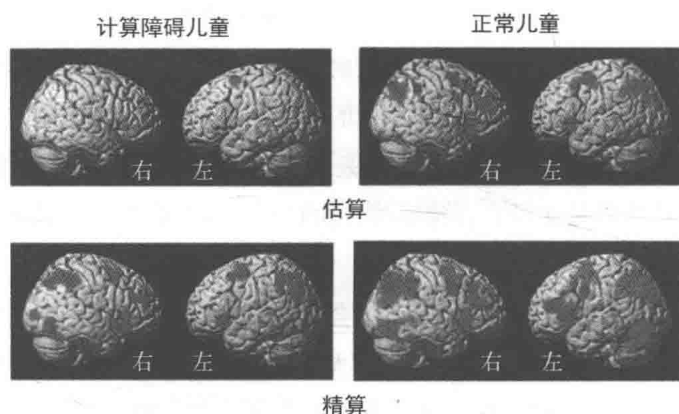


图 7.3　计算障碍的原因

这些有代表性的功能核磁共振（fMRI）结果显示，在估算中，计算障碍儿童左右脑半球激活部分较少。然而，在精确计算中，两组人群大脑两半球中被激活的部分相似（Kurcian et al.，2006）。

因为顶叶大量参与到数字运算中，所以这一区域的损伤会造成数学困难。研究表明，患有格斯特曼综合征（Gerstmann syndrome）的个体——顶叶损伤导致——显示出具有严重的数学计算问题和左右方向不分问题，但在口头言语方面不存在任何问题（Lemer，Dehaene Spelke & Cohen，2003；Suresh & Sebastian，2000）。

181

有视觉加工问题的个体几乎总是表现出数学困难。这也许是因为数学需要

个体对数字和数学情境进行视觉化处理，尤其是在代数和几何中。在排序方面存在问题的学生也可能患有计算障碍，因为他们记不住数学运算步骤的顺序或者完成一系列计算所需的具体公式。

遗传因素似乎也发挥了重要作用，对双胞胎的研究揭示了他们的数学能力十分接近。来自有数学天赋家庭的孩子或有学习障碍家庭的孩子都显示出与家族成员一致的能力倾向。患有特纳氏综合征（两个 X 染色体中一个 X 部分或全部缺失，通常在女性身上发现）的女孩通常会表现出计算障碍和其他学习问题（Murphy，Mazzocco，Gerner & Henry，2006）。

数学障碍的类型

数学的复杂性给研究数学障碍的人员提出了很大的挑战。学习缺陷包括掌握基本数字概念困难，数数能力不足，计算困难，以及程序、记忆与视觉-空间技能的缺陷（Geary，2004）。和其他学习缺陷一样，每种缺陷都有从轻到重的不同等级。 182

数字概念困难。正如在第一章中讨论过的，我们对小数字和数量的理解似乎是与生俱来的。然而，我们对大数和位数的理解，是在学龄前和小学早期阶段发展起来的。对于数学过程中所涉及的概念不能充分理解会延迟对更复杂程序的使用，同时降低儿童鉴别程序错误的能力。然而，研究表明，大多数存在数学障碍的孩子仍然有较好的数感，他们通常只是不会使用数字概念技巧解决计算问题（Geary，2004）。

数数能力不足。研究表明，存在数学障碍的孩子显示出在数数知识和数数精确性方面的缺陷。他们可能在数数时将数字保存在工作记忆方面存在问题，从而导致数数错误。

加减运算困难。患有数学障碍的孩子在解决简单和复杂计算问题时都有困难，并且他们主要依靠数手指。他们的困难主要源于数字操作过程（如解决 6 + 5 或者 4×4）和工作记忆两方面的缺陷。他们更倾向于使用不成熟的步骤，例如把所有数数一遍而不是继续数。

同时，他们没有表现出正常儿童所体现出的，从基于过程的问题解决向基于记忆的问题解决的转变，可能是因为在存储计算结果和从长时记忆中提取方面存在困难。而且，视觉-空间技能的缺陷也会导致计算问题，因为他们可能在多列加法时排错数字。尽管程序、记忆和视觉-空间技能缺陷会单独发生，但它们

通常相互关联。

程序性障碍。学生会在以下方面表现出障碍：

- 使用发展不成熟的计算程序（运算法则）；
- 在处理多步骤计算的顺序上存在问题，例如 52×13 或者 317+298；
- 在理解与程序相关的概念上存在困难；
- 在运用程序时经常犯错误。

关于这种障碍的确切原因尚不明了，但是研究揭示了一些有趣的现象。患有发展性或者获得性计算障碍的孩子仍然能数出多个物体的数目，在数数过程中按正确的顺序说出数字，理解基本的，例如基数的计数概念。然而，他们在解决复杂计算问题时表现出困难，研究人员怀疑一个可能的原因是负责程序任务的大脑左半球区域功能紊乱。

记忆障碍。学生表现出以下障碍：

183

- 提取计算算式困难；
- 提取计算算式时错误率很高；
- 提取出与正确算式相关的错误结果；
- 依赖数手指，因为这样减少了对于工作记忆的要求。

这种障碍很可能涉及在语言系统中对于信息的操作，这里我们也同样怀疑是大脑左半球的功能异常，主要是因为这些个体也经常伴有阅读障碍（D' Amico & Guarnera，2005）。这种联系更说明记忆障碍可能是遗传的。

记忆障碍可能由两个独立的问题引起。其中之一是从长时记忆中提取基本算式的能力受到干扰，这会导致产生比正常孩子多得多的错误。研究表明，这种形式的记忆障碍和语言加工系统密切联系，而且表明左脑具有发展性或者获得性缺陷。

另一个可能是由于不能抑制无关信息的提取而造成的提取过程受阻。因此学生看上去会很冲动。例如，当被问到 7+3 等于多少时，一个学生会脱口而出 8 或者 4，因为这些数是接下来要数到的（Passolunghi & Siegel，2004）。如果能够阻止无关信息进入工作记忆，解决算术问题会变得容易得多。当提取了无关信息后，它就会降低工作记忆的容量并且和正确信息争夺个体的注意。这种提取缺陷可能是由于大脑前额皮层负责抑制工作记忆运行的执行控制区域的缺陷所造成。

视觉-空间技能缺陷。有这种缺陷的学生：

- 遇到空间排列问题时有困难，例如在多位数加法问题中不能对齐各列；
- 经常错读数字符号，容易旋转和调换数的顺序，或者两者兼有；
- 误解数字的空间位置，导致位值错误；
- 在代数和几何中，处理涉及区域空间的问题时有困难。

研究表明，这种障碍是和右顶叶区域的缺陷紧密联系的，因为这一区域专门负责视觉-空间任务。此区域受过伤的个体经常表现出在空间定位任务中和运用心理数轴的能力的缺失（Zorzi，Priftis & Umiltá，2002）。一些研究表明，这也可能涉及左侧顶叶。

随着年龄的增长，孩子们常常会摆脱程序性和视觉空间方面的困难，但是记忆问题将可能持续终身。

184

许多学生会随着年龄的增长而学会利用序列图和其他工具记住数学程序的步骤，克服程序性障碍。对于那些患有视觉-空间缺陷的学生，当他们发现图纸的好处，以及学会利用逻辑而不仅仅依靠空间分析来解决代数和几何问题时，他们的问题也会得到改善。然而，记忆缺陷似乎并不会随着年龄的增长而有所改善。研究显示，有这方面困扰的人将会终身存在提取基本算术公式的困难。该研究指出，这不但表明了记忆问题并不仅仅存在于数学运算中，也有可能表明在从记忆里提取信息时存在更普遍的缺陷。

计算障碍与其他障碍的联系

阅读障碍（reading disorder）。一些有计算障碍的学生也会存在阅读困难，或者阅读障碍，但是这些障碍并不存在基因上的联系。同时存在这两种障碍的学生在解决数学问题时比只有计算障碍的学生成功率要低，主要是因为他们在把文字应用题转化为数学表达式方面同样存在困难。

注意力缺陷多动障碍（ADHD）。因为许多有 ADHD 的孩子在数学方面存在困难，一些研究者怀疑这两种情况是否有相关的基因成分，增大了它们被同时遗传的可能性。但是研究显示这两种障碍是分别遗传的，并且与不同的遗传区域相关联。这些研究表明，对于同时存在这两种状况的孩子，我们有必要对其分别进行鉴别和治疗。

非言语性学习障碍（NLD）。这种障碍被认为是由大脑右半球的缺陷所引起

的。存在 NLD 的个体在处理非言语性信息方面有困难，但是擅长处理言语性信息。他们表现出过度语言化并极具表现力，却显现出在视觉和空间任务上的不足。尽管极少有证据显示 NLD 直接与计算障碍相联系，但是 NLD 会影响一个人理解非言语性学习任务的能力。因此存在 NLD 的学生将会在书写、感知空间关系、绘制和复制几何图形以及获取数学概念和技能方面有困难。在这一章的后面，我们将会讨论一些能帮助这些个体的策略。

185

四、解决数学学习困难

1. 研究成果

大量的研究已经关注了提高数学学习困难的学生成绩的教学策略的有效性。正如所预期的那样，有些策略的效果会比其他策略更好，并且某个特定策略的有效性取决于所研究个体的学习困难的性质。在最近的三个项目中，研究者观察了 50 多个学生，以判断哪一种教学策略对数学学习困难的学生更有效(Baker, Gersten & Lee, 2002; Gersten et al., 2006; Kroesbergen & van Luitt, 2003)。他们的元分析针对六个方面的教学，以及它们对数学学习困难的学生和特殊教育学生的有效性。这些策略的有效性由效应量决定(0.2 效果较小，0.4 效果一般，0.6及以上效果很好)。表 7.5 列出了六种教学策略以及它们对数学学习困难的学生和特殊教育学生的效应量。

表 7.5　教学策略对学习困难和特殊教育学生的效应量

教　学　策　略	对学习困难学生的效应量	对特殊教育学生的效应量
系统而明确的教学	0.58(中等到大)	1.19(大)
学生的有声思维	未测量	0.98(大)
采用形象化及图表形式描述问题	未测量	0.50(中等)
由不同能力学生组成小组的结构化的同伴互助学习	0.62(大)	0.42(中等)
为教师提供教学形成性评估数据	0.51(中等)	0.32(小到中等)
直接为学生提供形成性评估数据	0.57(中等到大)	0.33(小到中等)

来源：Baker et al., 2002; Gersten et al., 2006; Kroesbergen & van Lultt, 2003。

在这些研究中，系统而明确的教学对两组学生都有持续而重要的影响。对特殊教育学生而言，1.19 的效应量表明有超过 80%的参与者在采用该策略后的测试分数得到了提高。该策略包括，教师演示一个特定的解决问题的方案，然后学生使用该方案找到自己的解法。这些方案对于解题的步骤程序和学生在解决问题时应该问到的问题都给出了高度明确的示范。 186

学生的有声思维显示出对接受特殊教育学生的有效性。该策略鼓励学生通过说出、写出或画出他们用来解决问题的步骤来表达他们的思维过程。这个过程可能会对部分学生有效，因为它减少了许多学生解决问题时的冲动想法。

用形象化和图表形式描述问题的策略对特殊教育学生存在普遍影响(0.50)。特别有趣的是，研究显示形象化表述的明确性决定了该策略干预的有效性。在以下情形中，效应量会更大：(1) 教师呈现的图表描述具有多种实例；(2) 教师帮助学生选择使用什么图并解释为什么；(3) 教师让学生用自己的图表组织进行实践。

尽管使用同伴互助和形成性数据同时提高了两组的成绩，但是对学习困难学生的效应量比对特殊教育学生的要大。

2. 具体-绘图-抽象方法

在包含以不同认知水平学习一个概念的多种案例的课堂上，数学学习困难的学生能明显受益。数学教育者已经认识到了研究所揭示的实质，对数学概念最佳的表述顺序是具体-绘图-抽象(CPA)方法。该方法也被称为具体-描述-抽象(CRA)或者具体-半具体-抽象(CSA)方法。无论是哪一种称谓，其教学方法的本质都类似，并都建立在布鲁纳(J. Bruner)20 世纪 60 年代的工作基础之上。这里的具体主要包括演示物(例如，条形棒、泡沫海绵饼以及记号笔)、测量工具以及其他能让学生在课堂上操作的物体。绘图包括由学生绘制或者提供给学生阅读和解释的图画、流程、表格或曲线图。抽象表示符号性的呈现，如学生为了展示对任务的理解写出的数字或字母。

在使用 CPA 方法时，活动的顺序是关键。首先进行的是使用具体材料的活动，从而让学生了解到数学运算可以用于解决现实问题。图形关系显示了具体操作物的视觉呈现，并且帮助学生在问题解决的过程中将数学运算形象化。在这里，重要的是教师要解释图形实例与具体实例是如何关联的。最后是符号的 187

规范表示，即用来展示符号是怎样更简洁和有效地表达数学运算的。学生需要在他们已有的数学技能的基础上熟练使用符号来达到最终的抽象水平。然而，这些符号的意义必须来源于具体物体的操作经验。否则，他们进行的符号运算将会是对记忆程序毫无意义的机械重复。

CPA 方法能让所有学生获益，但对数学学习困难的学生特别有效，主要是因为它是逐渐从具体的操作物到图片再到符号（Jordan, Miller & Mercer, 1998）。这些学生常常在教师抽象性地陈述数学问题时感到挫败。数学教师需要根据概念组织内容并且进行教学，以便学生能以有意义并且有效的方式进行新内容的学习。

实验研究证实了该方法的有效性。威策尔和他的同事对被鉴定为有代数学习困难的六、七年级学生进行了研究。在解决代数转化方程时，采用 CPA 方法的学生在之后的教学和测试中比接受常规教学的控制组同伴得分高。而且，使用 CPA 顺序教学的学生在解决代数变量时所犯的程序性错误减少（Witzel, Mercer & Miller, 2003）。

小学教师已经认识到在引入新概念时使用具体的和绘图活动的重要性。然而，尽管认知神经科学通过最新研究证明了 CPA 方法的有效性，但是该方法在中学以及高中课堂中并没有得到广泛运用。也许是初高中教师认为使用具体的操作物会让学生觉得过于基础，也许是课程的要求迫使教师为了节省时间而直接进入抽象水平。

具体操作物和绘画的呈现方式应该在所有年级都使用。通过使用类似于 CPA 的认知策略，教师给学生提供了一种处理数学问题的技巧而不只是寻求答案。这里给出一个从三种认知水平呈现代数应用题的例子。

✓ **例子：代数应用题**

高中生鲍勃和约翰周末都在当地的快餐店兼职，并且在周日当天工作结束时拿到薪水。当他们拿到薪水时，鲍勃比约翰多得了 10 美元，他们总共拿到 130 美元，那么他们每个人拿到的是多少？

188

- **具体：** 用游戏纸币数出 130 美元，给学生 A（鲍勃）10 美元，然后把剩下的钱（120 美元）在学生 A（鲍勃）和学生 B（约翰）间平分，看看每个学生有多少钱。鲍勃有 70 美元，约翰有 60 美元。
- **绘图：** 在投影仪或黑板上呈现 130 美元：

$10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10

找出给鲍勃的10美元(用粗斜体表示的):

(*$10*) $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10 $10

数出还剩多少钱(120美元):

将剩下的钱在鲍勃和约翰间平分:

鲍勃:**(*$10*)** + $10 $10 $10 $10 $10 $10

约翰: $10 $10 $10 $10 $10 $10

数出鲍勃有多少钱:70美元

数出约翰有多少钱:60美元

- **抽象:**

鲍勃 = x,约翰 = $(x - \$10)$

$x + (x - \$10) = \$130$

$2x - \$10 = \$130$

$2x = \$140$

$x = \$70$(鲍勃)

$x - 10 = \$60$(约翰)

表7.6是一个简单的计划工作表,提醒教师选择教学策略以落实所有三种认知水平。

表7.6 对应于三种呈现水平选择教学策略的计划表

CPA方法呈现水平计划表	
数学概念:	
水平	教学策略
具体	
绘图	
抽象	

3. 使用过程助记法

许多教师意识到助记手段能帮助学生记住重要的算式。然而,一种并不广为人知的助记技术,被称为过程助记法,被设计用来帮助记忆规则、原理

和程序。它们之所以被称为过程助记法，是因为它们是用来回忆在问题解决过程时需要的有序认知过程。一个关于拼写法则的普遍过程助记法是：除了在 c 后，我们在 e 前面用 i（use i before e，except after c）。在数学里，“请原谅我亲爱的婶婶莎莉（Please excuse my dear Aunt Sally）”帮助回忆代数方程的运算顺序［括号（parentheses），指数（exponents），乘法（multiplication），除法（division），加法（addition）和减法（subtraction）］。在教加减乘除的计算技能和记住拼写、三角函数、数学和科学的相关规则和程序时，过程助记法都是非常有用的。

189

> 过程助记法是帮助有数学困难的学生学习基本运算的有效记忆手段。

过程助记法起源于日本的“Yodai”，是“结构的本质”的意思，在日本是用于数学规则、计算技能和化学公式的教学。过程助记法通常与生动的形象相结合，例如用更容易记忆的短语（如：将傻瓜扔进池塘“flip the fool into the pool”）来表示数学法则（如：除以一个数等于乘以这个数的倒数“to divide fractions，multiply by a reciprocal”）（注：该短语利用了英文单词 fool 和 pool 形状上下颠倒来表示倒数）。句子、短语、歌曲以及韵律都可以用于解决问题的分步骤教学。用精巧的故事来阐述计算的构成，并且通过学生熟知的东西，如战士、慢跑者、游泳者、昆虫等来解释概念。

一些研究已经表明，过程助记法对数学学习困难的学生尤其有效。在一项研究中，伊曼纽·曼纳罗（Emmanuel Manalo）和同事调查了过程助记法教学对13～14 岁数学学习困难学生的计算技能的影响。学生被随机分到以下四个教学组中：过程助记，演示-模仿，学习技能，无指导。在教学后，过程助记组和演示-模仿组的学生在加减乘除方面都获得了明显的进步，过程助记组的学生提高程度更为明显，更重要的是，他们获得的进步在随后的阶段中比演示-模仿组学生保持得更久（Manalo，Bunnell & Stillman，2000）。曼纳罗使用的具体策略可以在他的文章中或者网上资源中找到，详情请查阅**资源**部分。

190

过程助记法对数学学习困难的学生之所以这么有效，是因为它是一种有效的记忆手段，能够让大脑积极地参与到学习和记忆的基础加工过程中。这种方法通过与学生相关的比喻将意义整合进来，更能吸引学生的注意力，激发学生的兴趣，并且使用形象化技巧帮助学生建立起了抽象符号与具体事物之间的联系。

4. 计算能力干预过程

许多有计算障碍的学生在基本的算术知识和概念知识学习方面存在困难，针对这些缺陷制订的干预措施，能有效地提高学生基本计算成绩。考夫曼、汉德尔和索尼（Kaufman，Handle & Thöny，2003）报告了由有计算障碍的三年级学生参与的干预项目的一个预实验结果。该干预每周进行三次，为期六个月。图7.4列出了该干预程序的组成，按照半分层的顺序从下往上进行实验。对接受干预的学生在干预之前和之后的测试结果显示，有计算障碍的学生在基本的算术知识、概念知识、算式以及过程性知识方面都表现出不错的效果，部分学生表现出计算能力的显著提高。

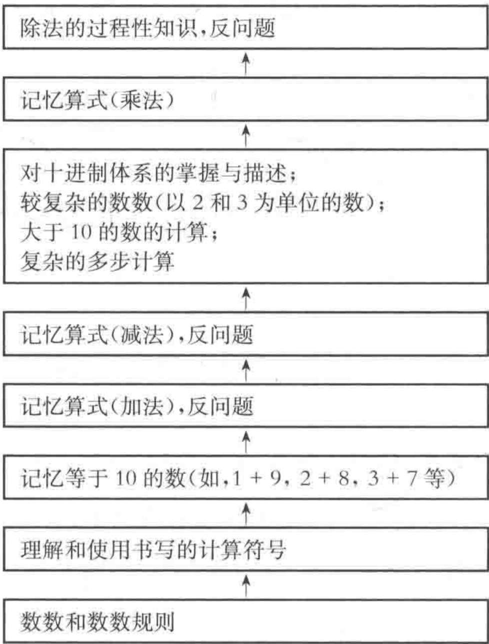


图7.4　干预程序的流程

干预程序的流程如图所示，它们是按半分层的顺序从下往上执行的（Kaufmann，Handle & Thöny，2003）。

5. 有非言语性学习障碍的学生

有非言语性学习障碍（NLD）的学生通常具有良好的言语加工技能，但是在

理解数学技能和概念中的视觉和空间部分却存在问题，尤其是在处理几何形状和图案时。尽管对于具有非言语性学习障碍的学生来说，理解数学概念和解决问题可能是困难的，但是他们应用教师所教授的数学公式却没有问题，这些学生通常很快掌握言语性知识。但当他们第一次看图表时，他们可能关注某一个具体细节；当他们看第二次时，看到的是另一个不同的细节；而第三次时又是另一个。因为没有整体视觉的概括能力，图表对他们来说几乎没有意义。另外，由于空间组织能力较差，他们可能很难将同一页上的问题对齐从而正确地解答。

191 针对有非言语性学习障碍的学生，数学教师在教学时应该考虑以下策略（Foss，2001；Serlier-van den Bergh，2006）：

✓ 充分发挥学生的语言和分析优势。这些学生能够在使用言语时学习，所以可以把语言环境作为起点。例如，让学生在尝试解决数学问题之前先大声朗读数学问题。

192 ✓ 跟学生达成协议，共同提高视觉和空间能力。画出与数学概念和问题相关的图及表格将会有相当大的帮助。

✓ 使用语言来描述视觉和空间信息。指点图表或实物模型对应地方的同时让学生也跟着做。

✓ 对于非言语性任务提供系列言语指导。

✓ 由于有非言语性学习障碍的小学生的触觉还没有得到完全发展，他们在处理操作物时将会感到困难。然而，操作物能帮助学生建立几何形状的心理表象并形象地展示空间关系，同时也能提高他们的视觉记忆技能。让他们首先用惯用手感受物体，然后用另一只手去感受，最后两只手同时操作物体。

✓ 鼓励学生慢慢整合感知信息：读，说，听，看，写和做。

6. 有数学和阅读障碍的学生

同时有阅读和数学障碍的学生显然有着双重劣势。然而，即使阅读和数学加工的脑区是分离的，但当学习者必须将文字应用题翻译成符号表达时，这两个分离的区域还是会相互作用。下面介绍一些对此类学生有效的策略。

✓ **在文字应用题里的线索词**。通过提示学生能够在应用题里决定使用哪种运算的常见词组或关键词，帮助学生把语言问题解码成数学运算。例如：

常见的词组/关键词	例　子	运　算
加多少，一起，总共，放在一起	当苹果放在一起，这里总共有多少？	加　法
拿走，拿，留下，给出	他们给了别人多少苹果？	减　法
从单个开始，然后求总数的问题	每一个石头重6磅，5个石头重多少？	乘　法
从许多开始然后求单个的问题	4盒相同的麦片需要12美元，每盒麦片多少钱？	除　法

193

√ **应用题图示**。在学生阅读了文字问题后，给学生一个故事图来强调故事的关键地方，如：简介、情节、人物、时间线以及高潮。加尼翁和马基尼（Gagnon & Maccini，2001）已经给出了一个类似的学习方法，叫作应用题图示，用以帮助数学学习困难的学生在处理文字问题时组织他们的思维。这个图可以由一个学生单独完成或者由两三个学生组成一个小组来完成。图7.5给出了应用题图示的一个变式（Gagnon & Maccini，2001）。

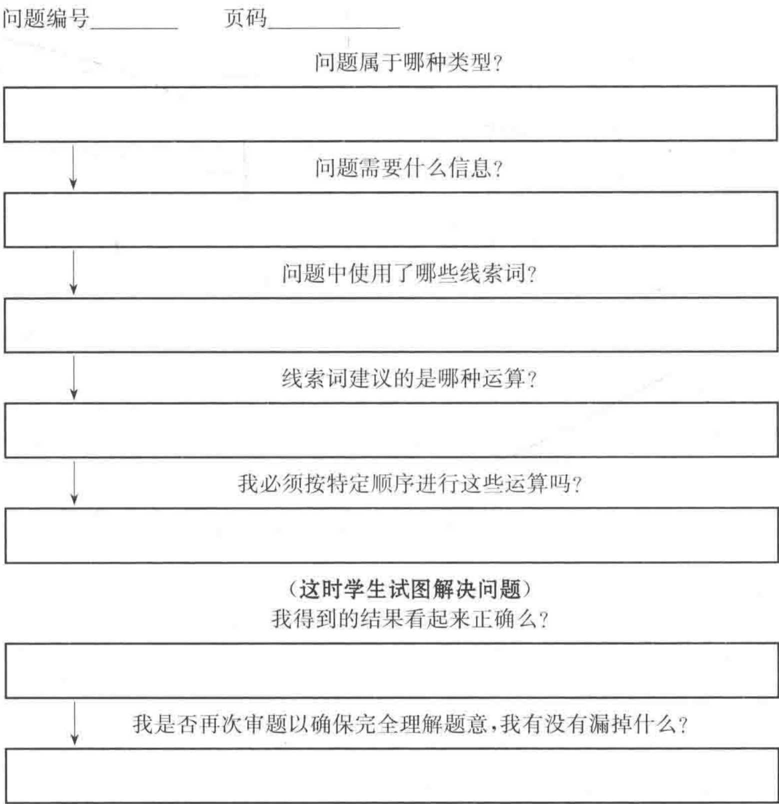


图7.5　应用题图示

这只是应用题图示的一个例子，能帮助有数学困难的学生组织他们解决问题的思路。

✓ **RIDD 策略**。RIDD 策略是由杰克逊(Jackson，2002)在 1997 年为有学习障碍的学生开发的。实际上，它对阅读和数学都有障碍的学生尤其有帮助。RIDD 代表读(Read)、想(Imagine)、决定(Decide)和执行(Do)，下面是对这四个步骤的描述。

- 步骤 1：读问题。从头到尾通读，这将利于学生集中精力于整个任务而不是一次只看一行。好的阅读者经常跳过一些词或者替换另一个词后继续阅读。在这一步，学生事先决定遇到不认识的词时，他们要怎么说。在数学文字问题里学生需要懂得替换长数字，而不是在第一次阅读时就非要把整个数字都说出来。教师应该在他们大声给学生朗读问题时示范这种替换。
- 步骤 2：想象问题。在这一步，学生在脑中构建已读内容相关的心理画面。在学习新材料时通过想象能激活更多的脑区并且能把学习转化为有意义的视觉、听觉和动觉的信息图像。这会使新信息更容易储存在学生自己的知识库里。想象可以帮助学生将注意力集中于所学的概念上，并且提供了一种监控他们行为表现的方式。
- 步骤 3：决定做什么。为了生成有关情境的心理图像，这一步鼓励学生一气呵成地阅读整个数学问题，然后决定做什么和以怎样的顺序来解决问题。比如在一个涉及加法和减法运算的数学问题里，学生会阅读问题，产生心理图像，然后决定先用加法还是先用减法。对年幼的学生，教师可以通过适当提问来指导他们完成这一步，这样他们就能决定通过怎样的过程来解决问题。注意这一步是怎样与阅读、形象化以及问题解决相结合的。
- 步骤 4：执行。在这一步，学生实际上就是在完成任务。通常，学生开始阅读一个数学问题，然后中途停下来，再开始写数字表达式。这样的过程会产生错误，因为学生还没有掌握全部信息。通过把执行作为一个单独的步骤，可以让学生意识到在阅读题目和写下解答之间还有事情要做。杰克逊观察到，当学生使用 RIDD 解决数学问题时，他们喜欢这种策略，因为他们认为只有到最后一步才

> RIDD 策略：
> R 读问题
> I 想象问题
> D 决定做什么
> D 执行

194

195

是他们做题的时间。显然，学生没有意识到，他们在前三步所做的都是解决问题过程的一部分。

✓ **计算机辅助**。现在有可供小学水平学生解决阅读和数学问题的计算机程序。比如，“知识冒险（Knowledge Adventure）”有许多根据国家和州标准而开发的专注于教授基本数学和阅读技能的软件。每个程序根据学生自己的速度提供指导，并对每个学生的进度自动跟踪，这样教师可对有需要的学生提供辅助指导。

7. 其他注意事项

及时反馈的作用

数学学习困难的学生容易因为缺乏成功而感到挫败，尤其是那些不知道是哪种特定缺陷导致他们成绩不好的学生。几个研究分别展示了在幼儿园、小学和中学里，教师反馈的时机对学习障碍学生表现的影响。结果非常一致：及时的反馈有助于提高学生的成绩，延迟的反馈对学生的成绩几乎没有作用（Dihoff etc.，2004；Epstein etc.，2003）。 196

最近一项对 40 个被鉴定为数学学习障碍的三年级学生的研究比较了即时反馈与延迟反馈的作用（Brosvic，Dihoff，Epstein & Cook，2006）。学生被平均分成两组，分别学习内容一样的算术课程。其中一组学生在每次课后都得到及时反馈，而另一组则到 20 次课结束时才给予反馈。反馈内容有纠正的也有肯定的，由教师提供或者通过评估表的形式给予。

两组都在 20 次课结束后对学到的算术运算进行了测试。图 7.6 比较了及

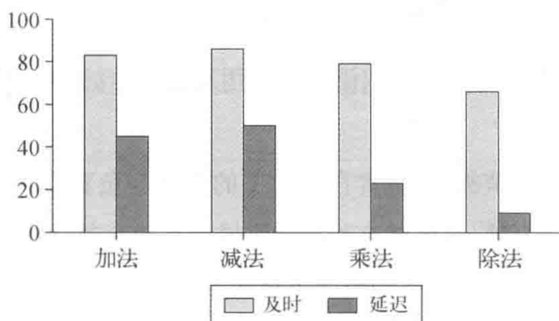


图 7.6 收到及时与延迟反馈的数学学习困难的学生测试成绩的比较

图中比较了收到及时反馈或者延迟反馈的数学学习困难学生的算术测试平均成绩。（获准改编自 Brosvic etc.，2006）

时反馈组和延迟反馈组的学生在加法、减法、乘法和除法测试中的平均成绩。显然，如果老师在课堂上能给予学生及时的肯定或者纠正，数学有困难的学生将取得更大的进步。

多语种学生

解决小学阶段多语种学生的数学问题的研究非常有限。一些研究发现，不管题目是用双语学生的母语给出还是用英语给出，有学习障碍的双语学生在有无关信息的应用题上都会有困难；而对于没有无关信息的应用题，无论用哪种语言呈现，他们都能够成功解决。教师可以通过使用图表和图片帮助学生记住数轴并理解题目。同样，如果学生能理解解决算术问题的过程，他们的母语即便可能会使他们在翻译文字应用题上有困难，也不妨碍他们获得算术表达式(Bernardo，2005；Rodriguez，Parmar & Signer，2001)。

相关研究建议，在有双语学生的班级中的数学教师应谨记以下几点：

✓ **画图和符号**。这些学生可能需要借助大量的符号和图来帮助他们理解文字应用题。这包括提供必要的图或让学生画出他们自己的图表，这些都可以帮助学生将数学问题转化为可视化的表达形式。

197

✓ **帮助学生选择正确的运算**。这些学生常常能够解决算术运算法则问题，他们的困难在于无法根据对数学题目中语句的理解而决定使用哪些算术运算。

✓ **强化基本概念**。不要想当然地认为这些学生对数量之间的关系有清晰完整的理解。教学活动中应不断强化基本概念，比如教授怎样使用数轴、怎样估算、怎样检验答案以及怎样表达数量之间的关系。

✓ **使用所有的信息**。鼓励双语学生使用所有给出的信息，包括图表来解决问题。

我们在之前的章节提到，负责言语加工的脑区与负责数字运算的脑区是独立并且有区别的。当然，必要时这些功能区域会互相沟通，但每一个功能区域都可以在没有其他功能区域输入的情况下单独执行自己的任务。母语在解决数学应用题上的影响取决于所涉及的特定解题过程的性质。我们还需要更多的研究来彻底了解双语学生如何学习数学。目前看来，他们显然拥有自己的数学抽象语言的认知过程，而且可能不受两种语言的影响。

五、下章预告

数学是什么？什么样的内在结构应该成为数学教学中的组成部分？认知神经科学研究的发现在关于课程应怎样规划和实施才能使新的知识被牢记方面告诉了我们什么？这是我们将在下一章，也是最后一章将要解决的问题。

六、本章反思

198

在此页简略记下要点、想法、策略和资源，以备日后思考。此页是你的个人日志小结，它能帮助你日后回忆。

199 # 第八章　综述：从学前到高中的数学课程规划

很难让一个高中生相信，
还有很多比代数和几何问题更难的问题。

——埃德加·W. 豪(Edgar W. Howe)

第一眼看本章题目，会让读者产生这样的一种印象：数学课程规划可能与其他学科领域的课程规划不同。从某种程度上说，确实如此。学习数学不仅需要掌握内容，还需要获得并加强某些加工技能，以促使学习成功。因此，教师在对任何年级进行数学课程的规划时，都应该考虑这些课程是否能够为学习者同时提供内容和所需的加工技能。为了探究更多的有关加工技能的问题，我们需要更深入地理解数学对于我们到底意味着什么。

200 ## 一、数学是什么

对大多数人来说，数学就是关于数字的计算。一些人可能将这一定义扩展到对数量(算术)、空间(平面和立体几何)和变化(微积分)的研究中。然而，即便是这个扩展后的定义，仍不能涵盖目

前数学及数学家已经发现的诸多领域。一个关于数学的更广的定义来自索耶(W. W. Sawyer)。在20世纪50年代,他把数学定义为"所有可能模式的分类和研究"。他将模式解释为"包含可识别的几乎任何形式的规则"(Sawyer, 1982)。

认可索耶观点的数学家将这一定义进一步精炼为：数学是一门关于模式的科学。德夫林(Devlin, 2000)不仅赞同这一定义,还将其作为他某本书的题目。他解释道,模式包括顺序、结构和逻辑关系,它超出了我们日常在瓷砖与墙纸上的视觉模式,延伸到了自然界中。在以下地方均可以找到模式,例如：行星运行轨道、花朵的对称性、人们的投票方式、豹子皮肤上的斑点、博彩游戏的结果、组成句子的词语之间的关系,以及我们觉察到音乐的各个音阶之间的顺序。一些模式是数字的,能够用数字进行描述,例如一个国家的投票模式以及中彩票的概率。但是,其他的一些模式,例如豹身上的斑点,它们仅仅是一种视觉外观,完全不能与数字联系起来。

数学可以被简洁地定义为模式的科学。

德夫林(Devlin, 2000)进一步指出,数学能够变不可见为可见。两千年以前,希腊数学家埃拉托斯特尼(Eratosthene)甚至能在脚从未离开过地球的情况下,以相当高的正确率计算出地球的直径。18世纪数学家丹尼尔·贝努利(Daniel Bernoulli)提出的方程,可以解释一架从头顶飞过的喷气式飞机如何能保持在空中。多亏了艾萨克·牛顿(Isaac Newton),我们才能够计算不可见的万有引力的效应。更近的,语言学家诺姆·乔姆斯基(Noam Chomsky)用数学去解释词语的不可见和抽象的模式,就是我们认为的符合语法规则的句子。

如果数学是关于模式的科学,如果可见和不可见的模式存在于我们周围,那么数学就不仅仅是与数字有关,而是与我们生存的世界息息相关。如果真是那样的话,那么为什么这么多的学生在他们高中毕业之前就因为数学而不堪重负了呢？在那些给学生留下"数学是一门充满了无意义抽象符号的枯燥无味的学科"印象的课堂上都发生了什么？显然,教育工作者必须在数学课程计划和课程设计中付出更多努力,将课程计划得令人兴奋并与实际相关,并且将这种兴奋带入每天的教学中。

201

我将把从学前到高中的数学课程应该包括哪些内容的讨论留给该领域的专家。在这里,我的目的是,建议如何将我们在前面章节讨论的认知神经科学研究

的成果应用到数学课程计划中，以帮助学生的数学学习和记忆保持。

二、计划课程时要问的问题

在确定了一门课程的内容目标之后，下一步就是设计课程学习情境。当教师了解了现有的关于大脑是如何学习的观点，就更有可能去开发一种课程，能让学生们在提高过程性技能的同时，学习并记住课程的内容目标。下面是一些在计划有效教学时需要考虑的问题。

1. 课程是否能兼顾记忆

你还记得我们在第三章讨论过的记忆容量以及记忆时间限制吗？当决定要给学生提供多少以及多长时间的新的学习内容时，这些限制就变得非常重要。

> 将课程目标数量保持在工作记忆容量的限制范围内，学生更有可能记住你所呈现的知识点。少即是多！

√ 在计划课程时，必须考虑工作记忆的**容量限制**。如果小学教师告诉学生，“我们今天要学 7 个数学算式”，这就已经有麻烦了。而对于高中教师，如果计划在一堂课上讲 8 个不同的知识点，也会存在问题。将课程目标数量保持在工作记忆容量的限制范围内，学生更有可能记住教师所呈现的知识点。少即是多！

√ **时间限制**意味着小学课程应该以 12～15 分钟为一片段，中学课程的分段则应该在 15～20 分钟之间。举个例子，一个学习段可以是教师指导，下一个学习段可以是学生练习或者计算机操作或者研究。这些时间限制对有分块学习安排的高中尤其关键。在这种设定下，课程长度应在 80～90 分钟之间。教师们已经从经验中学到，在整个课程时间中只有指导（主要通过教师的讲课）通常并不是有效的。将这 90 分钟的时段分成 20 分钟左右的 4 个时段会更有效率，因为每个新的时段都会重新开启时间限制的开关。有时候，在各学习段之间加进一个简短的无关任务活动，也能重新激活工作记忆时钟。短即是好！

> 在工作记忆的时间限制范围内教学，会让学生保持注意力并记住更多你所呈现的内容。短即是好！

202

2. 课程是否包括认知小结

认知小结描述了一个潜在的过程，通过该过程，学习者的工作记忆自动总结了它认为所学到的东西。就是在这个认知小结过程中，学生完成对新学习知识的复述过程，并赋予其意义，从而增加了新知识在长时记忆中保存的机会。

✓ **启动小结**。给学生指令，让他们专注于新知识的学习，例如“我将要给你们两分钟的时间去思考我们今天学到的，如何计算两位数的乘法（或者我们怎么计算多边形的面积？），准备好跟同伴进行讨论。”在这个声明中，告诉了学生他们有多少安静的时间去进行心理总结，并界定了学生将会进行的活动（讨论）。在这个讨论中，老师们要仔细听，对认知小结的质量和准确性进行评价，并据此对教学做出必要的调整。

✓ **认知小结与复习不同**。在复习过程中，你做了大部分的工作，重复课程中的关键数学概念并重新检查学生对知识的理解。在认知小结中，学生做了大部分的工作，通过心理复述和总结这些数学概念，以确定这些数学概念是否有意义。认知小结也给予了学生思考问题的机会，而对这些问题的思考可以澄清任何对概念的误解。

✓ **何时使用认知小结**。小结可以发生在课堂的不同时刻。

- 可以用来开始一堂课：“回忆一下我们昨天学过的关于分数加法的步骤，并准备讨论。”
- 可以在课堂中（称为阶段性小结）——当你从一个子学习任务转换到下一个学习任务时：“在我们学习第三个规则之前，在脑中复习学过的两个几何规则。”

203

认知小结可以被看作是一个及时的小投资，这个小投资可以获得已学知识保持量的显著收益。

- 课堂结尾（称为最终小结）。认知小结最应该发生在这个阶段。该阶段的认知小结是将所有的子学习任务集中起来。记住，这是学习者最后一次去弄清新知识意义的机会。

认知小结可以被看作是一个及时的小投资，这个小投资可以获得已学知识保持量的显著收益。

3. 是否考虑了首因-近因效应

在第三章中，我们讨论了首因-近因效应在记忆保持中的作用。教师在计划和教授课程时应该考虑这个作用。当学习者将注意力集中在教师身上准备专心学习的时候，这个学习阶段就开始了（如图 8.1 中的“0”所示）。在黄金时间 1，应该首先教授新信息和新技能，因为这时它最有可能被记住。要知道，学生几乎能记住在这个阶段呈现的任何信息。重要的是，此时只给学生呈现正确的信息，这时可不是什么去探测学生可能知道什么的好时机。我记得曾经见过一个数学老师这样开始一堂课：“今天，我们要学习平均数，中位数和众数的区别。有没有人知道它们之间的区别?”在几个错误的回答之后，教师最后解释了这个区别。但令人遗憾的是，在接下来的测试中，这些错误的猜测被学生当成了答案。怎么会这样呢? 这些错误答案正是在记忆保持最强的阶段——黄金时间 1 被提及的。

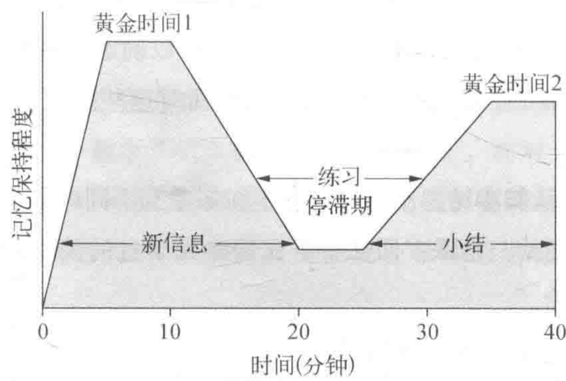


图 8.1　一个学习阶段中的记忆保持

新信息应该在黄金时间 1 呈现，小结安排在黄金时间 2。练习适合在停滞期进行。

在一堂课一开始就呈现新材料而没有学生自己的知识输入，这可能与其他的教学观念相冲突，如鼓励学生就他们正在学习的知识建构他们自己的模型观念。这种建构主义方法是有效的，但是当学生对于教师正在介绍的概念只有很少或者没有相应知识时，建构主义的方法是没有多大用处的。我们不可能将概念建构在无知之上。同样需要记住的是，自然并没有让我们的大脑为应付高等代数和微积分中的各种符号、比率和抽象关系作好准备。因此，学生并不具备可

204

以用来建立模型的直觉。教授的新材料应该在接下来的停滞期被练习或复习。这时，这些知识不再是新知识，并且练习会帮助学习者对知识进行组织以便进一步的加工。认知小结应该在黄金时间2进行，因为这是第二个最有力的记忆阶段，是学习者对知识理解和掌握的重要机会。把记忆、认知小结、首因-近因效应添加到图3.5中，显示了我们将如何利用关于记忆保持的研究成果设计出更有效的课程。

一堂数学课应该从家庭作业开始吗

许多数学教师上课的标准程序是从检查学生前一天的家庭作业开始。这可能是有效的策略，但是也需要注意一些事情。因为这个复习过程发生在黄金时间1，教师应该强调完成家庭作业的正确方法。花太多的时间集中在学生的错误上，可能会导致学生在记忆最强的阶段不经意间记住一些错误的东西。如果家庭作业检查仅仅是因果性的（关注的是完成的技术）而不是实质性的（讲解它的内容），就不要占用所有宝贵的黄金时间。教师可以先进行有关今天课程目标的学习，而在停滞期再收家庭作业。

下面是一些关于在课堂上如何利用首因-近因效应的总结。

✓ **在黄金时间1首先教授新知识**（当吸引了学生的注意力后），这是记忆最强的时段。换言之，这可能是一个重新教授那些学生理解起来有困难的概念的好机会。

✓ **避免在课堂开始时间学生对于今天要讲的新内容是否有所了解**。如果是新知识的话，我们可以假设是大多数学生都不了解的。但是，总有一些学生会很热切地去猜测它的意思，无论有多天方夜谭的答案都能给出来。由于这一时段是记忆保持最有力的阶段，几乎所有谈及的东西，哪怕是错误的信息，都有可能被记住。你需要自己给出确保是正确的信息和例子。

205

✓ **避免在宝贵的黄金时间处理班级管理事务**，例如查勤，签到。班级管理事务应当在正式讲课之前，或者在学生做练习的停滞期处理。

✓ **让学生利用停滞期练习新学习的知识**，或者通过与过去所学知识相联系开展讨论。“我们今天学习的计算多边形的面积怎么与之前学过的三角形的面积联系起来呢?”记住，对学习知识的记忆保持也发生在停滞期，但需要花费更多的精力和注意力。

√ **在黄金时间 2 进行认知小结**。这是学习者将意义赋予新知识，做出决策，确定如何将之转入长时记忆的最后的机会。这个阶段非常重要，学生的脑在该阶段处理信息如同在黄金时间 1 一样。假如你想要复习，那么就在认知小结之前进行，以增加小结的精确度。但是如果只复习而不小结，那么对记忆保持就没什么作用。

√ **将课程目标(或者子课程)结合在大约 20 分钟的教学片段中**，可使子课程学习与程序性小结联系起来。这个方法帮助学生认识到为什么子课程应当被整合到同一个记忆网络中。

4. 如何运用练习

我们在第三章中提到，练习可以让记忆变得更持久，却不是完美的。当你按照下列方法做的时候，练习可能会更有效：

√ **选择从最少的材料开始**，这对学习者的意义最大。使学习内容保持在学生当前年龄组的工作记忆容量限制内。过量的家庭作业会侵蚀学生的动机，使其经受挫折，并且会导致他们对数学学习持不良态度。

206

√ **一步一步地示范对概念的应用**。尽量使用具体的可操作物。这可以帮助学生发展出对于所教概念或者技能的视觉和空间表征。研究表明，大脑需要通过观察以确定掌握技能所需要的空间知识(Petrosini et al.，2003)。

√ **当学生集中精力学习时，确保在教师在场(有指导的练习)的短时间内进行练习**。

√ **观察练习，并就需要改变哪些要素以修正表现和提高成绩，给学生提供快速而精确的反馈**。在正确完成有指导的练习后，布置一定量的独立练习。

5. 应该采用什么写作

在第三章中，我们强调了写作在交流数学概念中的重要性。加入写作这个行为活动，可以使更多的脑神经元参与数学学习，从而让学生能够组织关于概念的思维。

在数学中使用写作的策略

这里有一些我认为在数学课堂中有效的写作策略，伯恩斯(Burns，2004)和埃迪格(Ediger，2006)也推荐了一些写作策略。

✓ **阐明目标**。学生，尤其是初中生，对在数学课堂上的写作既不感兴趣，也没能认清这种写作的目的。对于学生来说，要明白写作活动是帮助他们理解课堂所学的数学概念的一种工具。将写作看成一种学习和记忆的工具，而不是接受评分的作业任务，能够让学生对在数学课堂上写作感觉更舒服一些。

✓ **复习词汇**。在写作活动开始之前，复习并解释在课堂上遇到的所有新的词汇术语。他们知道真分数和假分数的意思吗，或者余角和补角的意思？将这些新词绘制成表格，贴在教室前面也是很有帮助的。

✓ **在写作之前进行讨论**。在课上，通过在写作之前讨论他们自己的观点，学生能够形成并理清他们的思路，选择恰当的词汇，并且确定写作内容的重点。他们可以写下在讨论中听到的任何数学观点，只要他们能够解释。

207

✓ **是个人写作还是小组合作**。尽管写作常常是一个人单独写，但是一些学生可能喜欢小组合作，那样他们可以与其他人讨论写作的内容。小组合作可以让学生们分享他们写下的观点，并且能够听到不同的意见。这两种不同的学习机会都可以考虑。

✓ **增加兴趣**。保持学生兴趣是学习动机的重要组成部分。写作活动可以通过加入一些历史信息而变得更有趣，例如：罗马和阿拉伯数字系统是怎么发展的？零占位符或负数是怎么发明的？人们已经使用了几千年的几何学是如何发展的？它对古代社会的发展又起着怎样的作用？

✓ **在需要的时候给予提示**。有时，年幼的学生在开始时需要一些提示。在黑板上写下一些提示。例如：我认为答案是____，因为______，或者今天，我学会了______。我知道这个是非常重要的，因为______。

✓ **避免照抄教科书上的内容**。期望学生使用他们自己的思维、短语以及词汇去写出他们自己的样例，而不是简单从教科书上抄下来。这里的重点是让大脑对学习的新概念进行精细复述，从而大大增加学生记住所学知识的可能性。

✓ **提供个别帮助**。一些学生，尤其是小学阶段的，或者并非以英语为母语的学生，他们肯定会在记下他们的想法时感到困难。与这些学生进行个别交谈，确保他们理解所学的，并理解他们在写作活动中所需要做的。通过提问的方式让他们与你交谈，“关于这个观点你学习到了什么？你怎么看待其他人的观点？”对于年纪较小的学生，仅仅是写作这个动作就需要他们付出很大努力，从而很难

将思路保持在工作记忆中。建议他们在写之前和写的过程中，自己默默地在心里复述他们想写的内容。

208

√ **应用学生的观点**。学生写作的东西经常能为澄清和扩展数学概念提供有用的观点。用这种方法分享学生的观点可以增加他们工作的价值，并且为以后的写作活动提供动机。

将写作作为一种评估工具

√ **写作可以是一种对学生和老师都有效的评估工具**。因为写作永久性地记录了学生的思维，记录了学生在学习上的进步。当学生回顾他们的写作时，可以反思他们的学习。一旦完成写作，学生就有了关于他们学习的永久性记录，这可以帮助他们在将来修正信息或者扩展他们对知识的应用。写作可以通过以下方式帮助你：

- 诊断错误的模式；
- 让你领悟教学应该从什么地方开始，或者什么主题需要重新教；
- 可以为学生在什么地方没有建立联系和为什么没有建立联系提供证据；
- 可以看出学生关于数学的信念以及态度。

√ **考虑将学生的写作文本保存在单独的文件夹中**。它们提供了按时间顺序排列的关于学生思维进步的信息册，这在家长会上也非常有用。

6. 是否考虑了多元智能

为了将加德纳的理论应用于课堂，已经有许多书提出了特定的活动方案，涵盖几乎所有科目。在这里，我的目的是提供一些通用的活动，数学教师可应用于教学并强化这八种智能。

在表8.1中，只需简单地用你教的数学概念替换“M.C.”部分即可。活动的分类可以帮助你区分不同的教学。一些活动可以为已经掌握了概念的学生丰富知识，而另外一些活动则可以为那些在理解概念中表现不稳定的学生提供额外的信息。当然，要求所有学生去练习所有的活动是不合适的，因为它们可能对那些在某一个特定领域表现较弱的学生不合适，或者对那些在某些情境下进行表演型活动感到不适的学生不合适。学生们在选择所要进行的活动时，应当有一些可选择的余地。

表 8.1　关于多元智能的活动

209

智　能	针对数学概念(M.C.)的活动
言语智能 “文字玩家”	● 通过讲故事去解释 M.C. ● 写关于 M.C. 的诗歌，神话，小说或者新闻性文章 ● 就 M.C. 做个报告 ● 组织关于 M.C. 的课堂讨论 ● 创建一个关于 M.C. 的谈话节目
逻辑/数学智能 “提问家”	● 把 M.C. 翻译成数学公式 ● 为 M.C. 设计一个验证试验 ● 制作一个包含 M.C. 的策略性游戏 ● 收集并解读与 M.C. 相关的数据 ● 为 M.C. 写一个计算机程序
空间智能 “视觉专家”	● 为 M.C. 绘制图表等 ● 针对 M.C. 设计一个展板，公告牌或者壁画 ● 创建一个可以展示 M.C. 的艺术品 ● 制作一个关于 M.C. 的电影或者广告
音乐智能 “音乐爱好者”	● 写首解释 M.C. 的歌曲 ● 用恰当的音乐伴奏为 M.C. 做报告 ● 解释一首歌的音乐如何与 M.C. 关联 ● 创造一个与 M.C. 相关的音乐游戏
身体/运动知觉智能 “运动者”	● 排演一个解释 M.C. 的话剧 ● 创编一个展示 M.C. 的舞蹈 ● 搭建一个可以解释 M.C. 的模型 ● 计划并参加一个能展示或解释 M.C. 的实地考察旅行
人际交往智能 “社交家”	● 组织一个讨论 M.C. 的班级会议 ● 组织或参加到解决 M.C. 的小组中 ● 建议协调学习个体差异和 M.C. 的方法 ● 参与使用 M.C. 的服务项目
自省智能 “个人”	● 创建一个关于 M.C. 的个性联想 ● 为完成 M.C. 设置一个目标 ● 描述你对 M.C. 的感受 ● 使用一些情绪性加工形式理解 M.C.

续 表

智　能	针对数学概念(M.C.)的活动
自然探索智能 “自然爱好者”	● 描述你在 M.C. 中探测到的任何模式
	● 解释如何能在环境中找到 M.C.
	● 展示 M.C. 如何能被应用在自然情境中
	● 演示当前的 M.C. 如何能与之前学过的 M.C. 建立联系

210

多元智能与 NCTM 过程标准

对活动的设计可以同时兼顾学生的多元智力水平与美国国家数学教师委员会的《学校数学教学原则与标准》(NCTM，2000)。表 8.2 展示了由亚当斯(Adams，2000)提出的一些有所交叉的活动。这些活动是针对加德纳最初提出的七种智能(除了自然智能外)设计的。

表 8.2　多元智能与 NCTM 过程标准的交叉重叠

智　能	问题解决	推理和论证	交　流	联　系	表　示
言语智能	为文字应用题编写背景内容。写出问题解决的方法	用别人理解的方式表达论点。驳斥或者支持一个数学观点	对于有关数学写作提示的回应。定义术语	写下数学概念之间的关系	将文字应用题转变成代数表达式。或者反之
逻辑/数学智能	收集，记录，使用数字解决问题。通过计算解决问题	概括数学结论。不采用举例的方式	设计并对书面的和口头的数学信息进行分类	分类并区分数字。探索数字在其他学科的用法	通过技术表示并归类数据。用不同的方法表示数字
空间智能	将绘图和图表作为解决问题的策略。解释图示的结论	通过折纸和剪纸证明数学概念	描述二维图形和三维物体的特征	探索在建筑学中对数学的应用。描述教室和学校	利用各种图表解决问题
身体/运动知觉智能	把“戏剧化”作为解决问题的一个策略	通过部分肢体去解释概念(如：比例)	利用肢体语言或者猜字游戏去传达数学信息	考察身体与世界的诸多限制之间的联系	通过将物体分配给人们来示范除法
音乐智能	把问题解决策略转化为音乐曲调，从而帮助回忆解决策略	将数学模式比作歌曲，有着“永无止境”的循环模式	听其他文化和其他语言中有关数数的歌曲	创建与音乐节目联系的数学音乐节目	使用具体物体模拟音乐韵律。探索具体物体的声音

211

续　表

智　能	问题解决	推理和论证	交　流	联　系	表　示
人际交往智能	通过合作性学习的方式解决问题，主导问题解决过程	与他人合作，从而提出论点和论据	在合作的小组中，分享交流角色	带领小组成员讨论数学概念间的联系	讨论不同表征的适用性
自省智能	为问题解决设定进步目标。监控问题解决过程	使用自身和已有知识为一个推论提供论据	描述对数学的感觉和态度。出声思考	思考一些将数学应用于生活中的方法	根据不同的表征组织思维，使用不同的表征

来源：Adams，2000。经作者许可转载。

在表8.2中提出的不同类型的数学经验能够帮助设计数学课程、教学和评价。有挑战性而且有意义的活动不仅能开发学生的认知能力，而且能增强学生的动机，并因此增加学生学习数学的乐趣。

7. 课程需要差异化教学吗

如今的教师面对的是满满一教室各种各样的学生。除了拥有不同的学习能力外，学生们来自不同的文化，讲不同的语言，并拥有不同的学习风格。主要基于通用型方法的直接指导法对这种多元化的群体并不奏效，能起作用的方法是教师根据学生的不同需要，运用多样化的教学技巧和策略对学生进行差异化教学。在差异化教学中，教师将给予适合学生特点的指导和评价，从而促进学生学习。教师可以针对不同学生区分教学内容、过程以及成果(Tomlinson，1999)。

- **内容差异化**是指每个学生的学习材料的变化。例如，假如对所有学生的课堂目标是确定两个三角形是否全等。一些学生可能需要通过摆弄这些三角形的图学会，而另一些学生可能会通过解决文字应用题学会。　212
- **过程差异化**指的是学生获得材料的不同方法。一个学生可能通过搜索学习中心获得材料，另一个可能通过组织一个访谈获得材料，而第三个则可能是通过网络收集信息。
- **成果差异化**指的是学生展示他们学习成果的不同方式。打个比方，为了展示学会的一个几何概念，一个学生可能解决文字应用题，而另一个同学则建立一个模型。

当教师决定采用差异化教学时，他们就将目标从教一个集体转变为教每个学生。这是一个教学模式的重大改变。而为了成功完成这种转变，教师需要对每个学生的准备状态、兴趣以及学习总体情况进行反应。一个教师可以根据任意一个因素或者几个因素的任意组合进行差异化教学(Tomlinson, 1999)。

- **准备状态**指的是学生的数学技能水平以及背景知识。一些信息可以在学期开始前通过翻阅学生的记录，标准化测试的分数，以及之前的数学成绩获得。诊断性评估也可以用于判断学生的准备状态，这些评估可能是正式的也可能是非正式的。教师可以提前测试或者询问学生关于某个特定主题的背景知识。
- **兴趣**是指学生想要去探索的或者可以激励学生的与数学相关的话题。这可以在整个学年中通过兴趣调查量表得知。教师们可能会发现，例如，一些学生对运动统计学或者建筑学感兴趣。在数学课中让学生参与课程计划是另一种开发兴趣的方式。教师们询问学生对于某一主题有什么兴趣，并尽力将他们的兴趣融入课程之中。
- **学习档案**包括学习风格(例如，学生是否具有视觉、听觉、触觉或者动觉输入偏好)、分组偏好(例如，独立，小组或者大组)以及环境偏好(例如，喜欢较大的空间还是安静的区域里工作)。学习风格可以通过学习风格量表进行测量，教师们也可以通过询问学生他们如何能够学得最好，以及通过观察学生的行为获得学生学习风格的信息。

213

差异化教学的一些准则

大量的书籍和网站针对每个年级的水平，提出了一些关于数学差异化教学的具体方式的建议(参见**资源**部分)。下面是一些通用准则：

✓ 如果你是差异化教学方面的新手，那么从小步走开始。从一个简单的单元入手，然后在另一个单元使用你的常规方法，根据成功以及需要改进的地方不断反省。学生们也需要适应这种学习方法，所以如果第一次的结果没有预期好，也不要灰心丧气。就像任何新策略一样，学会进行差异化教学也需要一个过程。为了获得成功，要逐渐实施这些方法，并不断修正那些不起作用的方法。

✓ 为学生的方案提供多种材料和机会，主要包括参考书、教具、建筑和绘图材料、可联网的电脑，以及其他的音像材料。合理布置教室让工作站能够在需要

的时候尽快建立。

√ 提供涵盖课程目标的几个方案供学生选择。不同的选择能够反映不同的学习风格。例如，视觉偏好的学习者可能想选择通过海报或者手册去呈现他们所学过的东西而不是仅仅去谈论它。

√ 这些选项应该在难度和复杂度上有差异，并且涵盖不同类型的思维技巧。布鲁姆的分类法（修订版）为在不同的认知思维水平上设计活动保留了一个有效的模型（Sousa，2006）。

√ 在每堂课中改变课程传授方式，从而吸引不同学习风格的人。例如，针对听觉偏好者使用讨论，针对视觉偏好者使用手册概括主题，而针对运动触觉偏好型，可结合亲自动手的实践活动。记住，当学生在学习过程中使用多种方式时，他们都会获益。

√ 对于每个方案和活动，考虑根据学生的能力或者兴趣进行分组。例如，在百分数或者绘图的单元，有些学生可能会对考察人口增长率有兴趣。

√ 考虑使用各种不同的评估工具并为学生提供几种评估选择。根据学生不同的技能水平，学习风格，思维技巧设计评估。展示样例，并与学生们分享你将要在开放式评估和方案中使用的题目及评分标准。　214

三、简化教学模型

根据所有我能从认知神经科学方面搜集到的资料，关于教授儿童和青少年数学的一个合理的模型可通过四个主要步骤推进（见图 8.2）。第一步建立在幼儿对数字的直觉、感数、数量操作和数数上。这些与生俱来的才能根植于发展中的神经网络。并且这些才能应该在具体的活动中得到培养，而不仅仅是玩些纸张表格的把戏。活动和教学应该利用数字谜语和问题来唤醒学生天生的好奇心。

接下来是向他们介绍数学中的符号系统，强调数学符号如何为数量操作提供了一种强大、便利的捷径。这时，再次将符号知识和数量直觉相联系非常重要。用这种方法，符号表征变成了直觉的一部分，而不是作为分离的、没有关联的语言被记忆。　215

在第三步中，为前青春期的大脑引入算数公理。这一步中应该尽可能多地使用恰当的具体的可操作物，因为我们此刻正进入关键期，这个时候学生可能

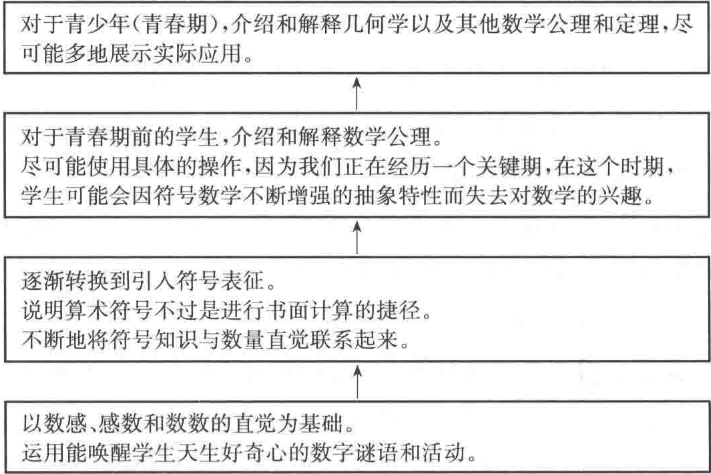


图 8.2　从学前到高中的数学教学注意事项流程

这是一个从学前到高中的数学教学注意事项的简单模型。最主要的是教师要不断地尝试将新信息融入到与数字和数量相关的直觉中,并尽可能多地使用具体的教具及实际应用的方法。

会因为符号数学不断增加的抽象性而感到厌烦。在这之后,青少年的大脑额叶将在高级思维和逻辑中变得越来越成熟。因此,在第四步,教师将介绍并解释数学和几何学的公理与定理。但是在任何时候,显示可能的实践应用仍然是必要的。记住,只有当学生理解所学知识的实际用途时,他们才能对其赋予意义,并因此增加记忆保持的机会。

我当然意识到,这个模型可能过于简单。但从另一方面讲,学生对数学感到厌倦的一个原因是我们通常未能尽力将学生在课堂上学到的与具体的实际应用建立起联系。除了数学,并没有多少学科会让教师们听到这样的悲叹:"为什么我必须知道这个?"仅仅这个感叹就足以给我们提出警示,我们必须更加努力地去创造意义。

四、结论

随着认知神经科学研究的发展,我们能够发现越来越多的关于人脑如何生长、发育以及学习的奥秘。这些发现为教育者和家长们提供了令人振奋的机会来决定儿童和青少年应该经历什么样的学习过程,以发展他们的全部潜能。研究不仅会产生新观点,也会经常证实过去的实践并对一些方法提出疑问。有效的教学策略贯穿

所有的课程内容领域。对于数学教学来说，我建议应该记住下述的一些观念：

- 每个人都有数学运算的能力，这是我们与生俱来的。
- 没有意义的机械学习阻碍数学知识的实际应用。
- 当数学知识对学习者来说能够理解并且有意义时，学习数学会变得容易。
- 当学习者能够将数学操作与概念相联系去解决现实世界中的问题时，学习数学将会变得容易。 216
- 谈论数学知识和写作会加深学习并有助于回忆。
- 数学学习涉及从具体到表征到抽象的过程。
- 人们用不同的方法学习数学。

无论是我们开发的指导性策略，还是我们编写的所有课程改革方案，以及我们买的所有教具，没有哪个部分会像教师那样重要。教师如何看待学习过程将会极大程度地决定教师的教学实践，并因此决定学生将在多大程度上学好数学。在这里我的目的是通过呈现认知神经科学的研究告诉教师，我们目前对于一般学习过程，特别是对于数学学习过程的发现。

为什么要学数学？因为我们的世界充满了各种模式。这些模式存在于花朵、雪花、贝壳、斑马和美洲豹等动物身上的记号中，存在于鸟类不同的鸣叫声中，等等。如果数学真的是一门关于模式的学问，那么教师应该帮助学生认识到，数学学习不仅对将来的生活有用，也为理解这个壮丽世界中的奇观和美丽打开了一扇窗户。

五、本章反思 217



在此页简略记下要点、想法、策略和资源，以备日后思考。此页是你的个人日志小结，它能帮助你日后回忆。



219

术语表

Abstraction 抽象 将数学概念的内在实质提取出来的过程，去除概念中原来可能有的任何与实际物体相连的关系，进行概括以拥有更为广泛的应用。例如，几何公理。

Algorithm 运算法则 计算或其他问题解决运算中使用的流程或一系列规则。

Associative memory 联结记忆 大脑探测模式并在工作记忆与过去经验之间建立联系的能力。

Associativity 结合率 数字的一种属性，相加或相乘的顺序不影响计算结果。因此，$(a+b)+c=a+(b+c)$，或者$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$。

220

Cardinal principle (cardinality) 基数原理(基数性) 关于数数时数到的最后一个数表示所数那组物体的多少的概念。

Cerebellum 小脑 脑的一个重要部分，位于脑后部脑干上方，主要负责协调肌肉运动。

Cerebrum 大脑 脑的主要组成中的最大一部分，控制对感觉信息的解读、思维和记忆。

Chunking 组块 大脑将一组类似物体知觉成一个物体或一个组块的能力。

Closure 小结 是一种教学策略，让学生在课堂上有一段安静的时间在心里重新整理他们在课上学到的内容。

Commutativity 交换率 数字的一种属性。数字可以以任何顺序相加或相乘而不改变结果。因此 $8+5=5+8$，或者 $4\times7=7\times4$。

Compensation 补偿 指当从一个集合中的一部分拿走一些物体放到另一部分时，总的数量不变。

Constructivism 建构主义 是一种学习的理论，认为主动的学习者会利用过去的经验和组块构建新学知

识的意义，从而建立更为广泛的概念体系。

Corpus callosum 胼胝体 是连接左右半球使它们能够沟通的神经纤维桥梁。

Cortex 大脑皮层 覆盖在大脑上的薄细胞层，包含着所有用于认知和运动加工的神经元。

Covariation 共变 认为当整体中的一部分数量增加（或减少）时，整体数量也会增加（或减少）。

Declarative memory 陈述性记忆 我们可以有意识地获取有关的事件和事实的知识。

Distributed practice 分散学习 不断重复运用某项技能且间隔时间不断加长，以提高表现。

Electroencepahlograph 脑电记录仪 一种仪器，可以通过贴在头皮上的电极获取并显示脑电活动的波。

Episodic memory 情景记忆 我们可以有意识获取的关于个人过去发生事件的知识。

Frontal lobe 额叶 大脑的前部，监控高级思维、指导问题解决和调节情绪（边缘）系统的过度。

Functional magnetic resonance imaging (fMRI) 功能磁共振成像 一种仪器，测量大脑的血流量，以记录神经元活动强和低的脑区。

Gray matter 灰质 覆盖大脑的薄层，也被称为大脑皮层。

Guided practice 指导性练习 当教师在场的时候重复技能，教师能够给予及时和具体的反馈。

Immediate memory 瞬时记忆 一种临时记忆，此时信息被简洁而下意识地加工，然后可能被阻止，也可能获准进入到工作记忆。

221

Independent practice 独立练习 当教师不在场的时候，靠自己重复技能。

Limbic area 边缘区域 位于大脑底部控制情绪的结构。

Long-term storage 长时存储区 大脑用于永久保存记忆的区域。

Massed practice 集中练习 经过数个短时间间隔重复技能以获得初步的能力。

Mnemonic 助记法 将单词或短语用作记住信息、模式、规则或程序的一种手段。

Motivation 动机 需要和愿望对于行为的影响。

Motor cortex 运动皮层 在脑顶部从一边耳朵到另一边耳朵的负责控制运动的狭长带状区域。

Neuron 神经元 组成大脑和神经系统的基本细胞，由胞体、一条传输冲动的长纤维（轴突），和许多接收

冲动的短纤维(树突)组成。

Nondeclarative memory 非陈述性记忆 那些关于运动和认知技能的能够无意识提取的知识,如骑自行车。

Number sense 数感 在其有限制形式内,是指我们能够意识到一个物体从一堆物体中添加或拿走的能力。

Numerosity 数量 对于粗略数量的感知,比如在不给出精确数值的情况下知道是多于还是少于。

Occipital lobe 枕叶 位于大脑后部的区域,主要负责加工视觉信息。

Parietal lobe 顶叶 大脑的一个脑区,位于枕叶和额叶之间,参与加工感觉信息,比如触觉、味觉和运动。

Positron emission tomography (PET) scanner 正电子发射断层扫描仪 一种仪器,可以追踪大脑组织中放射标记糖的代谢从而产生有关细胞活动的彩色图像。

222

Practice 练习 重复技能以增进速度和准确性。

Prefrontal cortex 前额皮层 紧靠额头后的脑区,负责控制计划、决策、推理、行为执行和整合工作记忆信息。

Primacy-recency effect 首因-近因效应 指在一个学习阶段中,一个人倾向对于最先出现的内容记得最好,而对最后出现的内容记得第二好的现象。

Prime-time 黄金时间 在一个学习阶段中,最有可能记住信息和技能的时间段。

Procedural memory 程序性记忆 非陈述性记忆的一种形式,有助于运动(骑自行车)和认知(学习阅读)技能的学习。

Rehearsal 复述 在工作记忆中再加工信息。

Semantic memory 语义记忆 可能不与任何具体事件相联系的关于事实和数据的知识。

Subitizing 感数 不用数数,一眼看上去就能确定物体数目的能力。

Temporal lobe 颞叶 位于两边耳朵后面的大脑区域,就在顶叶下方。主要参与声音和口头语言的加工和理解。

White matter 白质 位于大脑灰质下的支持组织。

Working memory 工作记忆 可以有意识地加工信息的一种临时记忆。

参考文献

Adams, T. L. (2000, Winter). Helping children learn mathematics through multiple intelligences and standards for school mathematics. *Childhood Education, 77,* 86–92.

Ainsworth, L., & Christinson, J. (2000). *Five easy steps to a balanced math program: A practical guide for K–8 classroom teachers.* Denver: Advanced Learning Press.

Alarcón, M., Knopik, V. S., & DeFries, J. C. (2000, January-February). Covariation of mathematics achievement and general cognitive ability in twins. *Journal of School Psychology, 38,* 63–77.

Altermatt, E. R., & Kim, M. E. (2004). Can anxiety explain sex differences in college entrance exam scores? *Journal of College Admission, 183,* 6–11.

Ashcraft, M. H. (1995). Cognitive psychology and simple arithmetic: A review and summary of new directions. *Mathematical Cognition, 1,* 3–34.

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11,* 181–185.

Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001, June). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology: General, 130,* 224–237.

Augustyniak, K., Murphy, J., & Phillips, D. K. (2005, December). Psychological perspectives in assessing mathematics learning needs. *Journal of Instructional Psychology, 32,* 277–286.

Baker, S., Gersten, R., & Lee, D-S. (2002). A synthesis of empirical research on teaching mathematics to low-achieving students. *Elementary School Journal, 103,* 51–73.

Barth, H., La Mont, K., Lipton, J., & Spelke, E. S. (2005, September 27). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 102,* 14116–14121.

Barton, M. L., & Heidema, C. (2002). *Teaching reading in mathematics* (2nd ed.). Aurora, CO: Mid-continent Research for Education and Learning.

Beilock, S. L., Kulp, C. A., Holt, L. E., & Carr, T. H. (2004, December). More on the fragility of performance: Choking under pressure in mathematical problem solving. *Journal of Experimental Psychology: General, 133,* 584–600.

Berch, D. B. (2005, July/August). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38,* 333–339.

Berger, A., Tzur, G., & Posner, M. I. (2006, August 15). Infant brains detect arithmetic errors. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 103,* 12649–12653.

Bernardo, A. B. I. (2005, September). Language and modeling word problems in mathematics among bilinguals. *The Journal of Psychology, 139,* 413–425.

Berns, G. S., Cohen, J. D., & Mintun, M. A. (1997). Brain regions responsiveness to novelty in the absence of awareness. *Science, 276,* 1272–1275.

Bigelow, B. & Zhou, R. (2001). Relational scaffolding of school motivation: Development continuities in students' and parents' ratings of the importance of school goals. *The Journal of Genetic Psychology, 162,* 75–93.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006, January). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology, 42,* 189–201.

Brannon, E. M. (2003, July). Number knows no bounds. *Trends in Cognitive Sciences, 7,* 279–281.

Brannon, E. M. (2005, March). The independence of language and mathematical reasoning. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 102,* 3177–3178.

Brosvic, G. M., Dihoff, R. E., Epstein, M. L., & Cook, M. L. (2006). Feedback facilitates the acquisition and retention of numerical fact series by elementary school students with mathematics learning disabilities. *The Psychological Record, 56,* 35–54.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* Cambridge, MA: Belknap Press.

Buckner, R. L., Kelley, W. M., & Petersen, S. E. (1999, April). Frontal cortex contributions to human memory formation. *Nature Neuroscience, 2,* 311–314.

Burns, M. (1998). *Math: Facing an American phobia.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Burns, M. (1998, January). Teaching math, thinking math. *Early Childhood Today, 12,* 29–35.

Burns, M. (2004, October). Writing in math. *Educational Leadership, 62,* 30–33.

Butterworth, B. (1999). *What counts: How every brain is hardwired for math.* New York: Free Press.

California Department of Education. (1999). *Mathematics framework for California public schools: Kindergarten through grade twelve.* Sacramento: Author.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998, January). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 3–20.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000, October). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades.* Research report. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning & Achievement in Mathematics & Science.

Castelli, F., Glaser, D. E., & Butterworth, B. (2006, March 14). Discrete and analogue quantity processing in the parietal lobe: A functional MRI study. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 103,* 4693–4698.

Clements, D. H. (1999, March). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5,* 400–405.

Clements, D. H. (2001, January). Mathematics in the preschool. *Teaching Children Mathematics, 7,* 270–275.

Damasio, A. (2003). *Looking for Spinoza: Joy, sorrow, and the feeling brain.* New York: Harcourt.

D'Amico, A., & Guarnera, M. (2005). Exploring working memory in children with low arithmetic achievement. *Learning and Individual Differences, 15,* 189–202.

Danzig, T. (1967). *Number: The language of science.* New York: Free Press.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. (2001). Author's response: Is number sense a patchwork? *Mind & Language, 16,* 89–100.

Dehaene, S., Dupoux, E., & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 16,* 626–641.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., & Wilson, A. J. (2004, April). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology, 14,* 218–224.

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999, May). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science, 284,* 970–974.

Devlin, K. (2000). *The math gene: How mathematical thinking evolved and why numbers are like gossip.* New York: Basic Books.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001, Fall). Developing young children's multidigit number sense. *Roeper Review, 24,* 11–13.

Dihoff, R. E., Brosvic, G. M., Epstein, M. L., & Cook, M. J. (2004). Provision of feedback during preparation for academic testing: Learning is enhanced by immediate but not delayed feedback. *The Psychological Record, 54,* 207–231.

Dobbs, J., Doctoroff, G. L., Fisher, P. H., & Arnold, D. H. (2006, March-April). The association between preschool children's socio-emotional functioning and their mathematical skills. *Journal of Applied Developmental Psychology, 27,* 97–108.

Ediger, M. (2006, June). Writing in the mathematics curriculum. *Journal of Instructional Psychology, 33,* 120–123.

Epstein, M. L., Brosvic, G. M., Dihoff, R. E., Lazarus, A. D., & Costner, K. L. (2003). Effectiveness of feedback during the testing of preschool children, elementary school children, and adolescents with developmental delays. *The Psychological Record, 53,* 177–195.

Farkas, R. D. (2003, September-October). Effects of traditional versus learning-styles instructional methods on middle school students. *Journal of Educational Research, 97,* 42–52.

Fletcher, J. M. (2005, July-August). Predicting math outcomes: Reading predictors and comorbidity. *Journal of Learning Disabilities, 38,* 308–312.

Flewelling, G. & Higginson, W. (2001). *A handbook on rich learning tasks.* Kingston, ON, Canada: Centre for Mathematics, Science, and Technology Education.

Forgasz, H. (2006, Spring). Factors that encourage or inhibit computer use for secondary mathematics teaching. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 25,* 77–93.

Foss, J. M. (2001). *Nonverbal learning disability: How to recognize it and minimize its effects.* (ERIC Digest E-619). Arlington, VA: ERIC Clearinghouse on Disabilities and Gifted Education.

Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematical disabilities with and without comorbid reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 35,* 563–573.

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D., & Hamlett, C. L. (2005, August). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology, 97,* 493–513.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997, March). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 130–162.

Gagnon, J., & Maccini, P. (2001). Preparing students with disabilities for algebra. *Teaching Exceptional Children, 34,* 8–15.

Gardner, H. (1993). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences* (Rev. Ed.) New York: Basic Books.

Gazzaniga, M. S., Ivry, R. B., & Mangun, G. R. (2002). *Cognitive neuroscience: The biology of the mind* (2nd Ed). New York: Norton.

Geary, D. C. (2004, January-February). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 4–15.

Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *Journal of Special Education, 33,* 18–28.

Gersten, R., Chard, D., Jayanthi, M., & Baker, S. (2006). *Experimental and quasi-experimental research on instructional approaches for teaching mathematics to students with learning disabilities: A research synthesis.* Signal Hill, CA: Center on Instruction/RG Research Group.

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005, July-August). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38,* 293–304.

Goldberg, E. (2001). *The executive brain: Frontal lobes and the civilized mind.* New York: Oxford University Press.

Gogtay, N., Giedd, J. N., Lusk, L., Hayashi, K., Greenstein, D., Valtuzis, A. C., et al. (2004, May 25). Dynamic mapping of human cortical development during childhood and early adulthood. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 101,* 8174–8179.

Graham, D., & Meyer, L. (2007). Graphic organizers in mathematics. Available online at www .sw-georgia.resa.k12.ga.us

Griffin, S. (2002). The development of math competence in the preschool and early school years: Cognitive foundations and instructional strategies. In J. M. Rover (Ed.). *Mathematical cognition: A volume in current perspectives on cognition, learning, and instruction* (pp. 1–32). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Griffin, S. (2003, February). Laying the foundation for computational fluency in early childhood. *Teaching Children Mathematics, 9,* 306–309.

Griffin, S. (2004). Building number sense with Number Worlds: A mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly, 19,* 173–180.

Griffin, S. (2004). Number worlds: A research-based mathematics program for young children. In D. H. Clements, A. M. DiBiase, & J. Sarama (Eds.). *Engaging young children in mathematics,* (pp. 325–342). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Griffin, S. & Case, R. (1997). Rethinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education, 3,* 1–49.

Guerrero, S., Walker, N., & Dugdale, S. (2004, Spring). Technology in support of middle grade mathematics: What have we learned? *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 23,* 5–20.

Gurganus, S. (2004). Promote number sense. (20 Ways to . . .). *Intervention in School and Clinic, 40,* 55–58.

Habib, R., McIntosh, A. R., Wheeler, M. A., & Tulving, E. (2003). Memory encoding and hippocampally-based novelty/familiarity discrimination networks. *Neuropsychologia, 41,* 271–279.

Harper, N. W., & Daane, C. J. (1998). Causes and reduction of math anxiety in preservice elementary teachers. *Action in Teacher Education, 19,* 29–38.

Hunter, M. (2004). *Mastery teaching.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Ifrah, G. (1985). *From one to zero: A universal history of numbers.* New York: Penguin Books.

Ischebeck, A., Zamarian, L., Siedentopf, C., Koppelstätter, F., Benke, T., Felber, S., et al. (2006, May). How specifically do we learn? Imaging the learning of multiplication and subtraction. *NeuroImage, 30,* 1365–1375.

Jackson, F. B., (2002, May). Crossing content: A strategy for students with learning disabilities. *Intervention in School and Clinic, 37,* 279–282.

Jones, G., Thornton, C., & Putt, I. (1994). A model for nurturing and assessing multidigit number sense among first grade children. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 117–143.

Jordan, L., Miller, M., & Mercer, C. (1998). The effects of concrete to semi-concrete to abstract instruction in acquisition and retention of fraction concepts and skills. *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal, 9,* 115–122.

Kaufmann, L., Handl, P., & Thöny, B. (2003, November-December). Evaluation of a numeracy intervention program focusing on basic numerical knowledge and conceptual knowledge: A pilot study. *Journal of Learning Disabilities, 36,* 564–573.

Klibanoff, R. S., Levine, S. C., Huttenlocher, J., Vasilyeva, M., & Hedges, L. V. (2006, January). Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "math talk." *Developmental Psychology, 42,* 59–69.

Kline, K. (1998, October). Kindergarten is more than counting. *Teaching Children Mathematics, 5,* 84–87.

Koehler, O. (1951). The ability of birds to count. *Bulletin of Animal Behavior, 9,* 41–45.

Krakauer, J. W., & Shadmehr, R. (2006, January). Consolidation of motor memory. *Trends in Neurosciences, 29,* 58–64.

Kroesbergen, E. H., & van Luitt, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special education needs: A meta-analysis. *Remedial and Special Education, 24,* 97–114.

Kucian, K., Loenneker, T., Dietrich, T., Dosch, M., Martin, E., & von Aster, M. (2006). Impaired neural networks for approximate calculation in dyscalculic children: A functional MRI study. *Behavioral and Brain Functions, 2.* Available online at www.pubmedcentral.nih.gov/tocrender.fcgi?iid=126977

Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004, September). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9-year-old students. *Cognition, 93,* 99–125.

Latterell, C. M. (2005, Fall). Social stigma and mathematical ignorance. *Academic Exchange Quarterly, 9,* 167–171.

Lawrenz, F., Gravely, A., & Ooms, A. (2006, March). Perceived helpfulness and amount of use of technology in science and mathematics classes at different grade levels. *School Science and Mathematics, 106,* 133–139.

Legault, L., Pelletier, L., & Green-Demers, I. (2006). Why do high school students lack motivation in the classroom? *Journal of Educational Psychology, 98,* 567–582.

Lemer, C., Dehaene, S., Spelke, E., & Cohen, L. (2003). Approximate quantities and exact number words: Dissociable systems. *Neuropsychologia, 41,* 1942–1958.

Luna, B. (2004, October). Algebra and the adolescent brain. *Trends in Cognitive Sciences, 8,* 437–439.

Luna, B., Thulborn, K. R., Munoz, D. P., Merriam, E. P., Garver, K. E., Minshew, N. J., et al. (2001, May). Maturation of widely distributed brain function subserves cognitive development. *NeuroImage, 13,* 786–793.

Maguire, E. A., Frith, C. D., & Morris, R.G.M. (1999, October). The functional neuroanatomy of comprehension and memory: The importance of prior knowledge. *Brain, 122,* 1839–1850.

Manalo, E., Bunnell, J. K., & Stillman, J. A. (2000, Spring). The use of process mnemonics in teaching students with mathematics learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 23,* 137–156.

Martin, A., Wiggs, C. L., & Weisberg, J. (1997). Modulation of human medial temporal lobe activity by form, meaning, and experience. *Hippocampus, 7,* 587–593.

McComb, K., Packer, C., & Pusey, A. (1994). Roaring and numerical assessment in contests between groups of female lions, *Panthera leo. Animal Behavior, 47,* 379–387.

McGlone, M. S., & Aronson, J. (2006, September-October). Stereotype threat, identity salience, and spatial reasoning. *Journal of Applied Developmental Psychology, 27,* 486–493.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development, 6,* 285–306.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., et al. (2006). Middle school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instruction, 24,* 367–385.

Mechner, F. & Guevrekian, L. (1962). Effects of deprivation upon counting and timing in rats. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 5,* 463–466.

Micheloyannis, S., Sakkalis, V., Vourkas, M., Stam, C. J., & Simos, P. G. (2005, January 20). Neural networks involved in mathematical thinking: Evidence from linear and non-linear analysis of electroencephalographic activity. *Neuroscience Letters, 373,* 212–217.

Miller, K., & Paredes, D. R. (1990). Starting to add worse: Effects of learning to multiply on children's addition. *Cognition, 37,* 213–242.

Miller, K., Smith, C. M., Zhu, J., & Zhang, H. (1995). Preschool origins of cross-national differences in mathematical competence: The role of number-naming systems. *Psychological Science, 6,* 56–60.

Monuteaux, M. C., Faraone, S. V., Herzig, K., Navsaria, N., & Biederman, J. (2005, February). ADHD and dyscalculia: Evidence for independent familial transmission. *Journal of Learning Disabilities, 38,* 86–93.

Morge, S. (2005, Fall). High school students' math beliefs and society. *Academic Exchange Quarterly, 9,* 182–187.

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature, 215,* 1519–1520.

Murphy, M. M., Mazzocco, M., Gerner, G., & Henry, A. E. (2006). Mathematics learning disability in girls with Turner syndrome or fragile X syndrome. *Brain and Cognition, 61,* 195–210.

National Assessment of Educational Progress (NAEP). (2007, February). *The nation's report card: 2005 assessment results in mathematics.* Washington, DC: National Center for Educational Statistics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1995). *Assessment standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2006). *Curriculum focal points for mathematics in prekindergarten through grade 8.* Reston, VA: Author.

National Science Foundation. (2004). *Science and engineering indicators: Elementary and secondary education.* Arlington, VA: Author.

Ninness, C., Rumph, R., McCuller, G., Harrison, C., Ford, A. M., & Ninness, S. K. (2005, Spring). A functional analytic approach to computer-interactive mathematics. *Journal of Applied Behavioral Analysis, 38,* 1–22.

Nuerk, H. C., Kaufmann, I., Zoppoth, S., & Willmes, K. (2004). On the development of the mental number line: More, less, or never holistic with increasing age? *Developmental Psychology, 40,* 1190–1211.

Nunley, K. (2004). *Layered curriculum: The practical solution for teachers with more than one student in their classroom* (2nd ed.). Amherst, NH: Brains.org.

Nunley, K. (2006). *Differentiating the high school classroom.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Passolunghi, M. C., & Siegel, L. S. (2004). Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology, 88,* 348–367.

Paus, T. (2005). Mapping brain maturation and cognitive development during adolescence. *Trends in Cognitive Sciences, 9,* 60–68.

Pekrun, R., Maier, M., & Elliot, A. (2006). Achievement goals and discrete achievement emotions: A theoretical model and prospective test. *Journal of Educational Psychology, 98,* 583–597.

Petrosini, L., Graziano, A., Mandolesi, L., Neri, P., Molinari, M., & Leggio, M. G. (2003, June). Watch how to do it! New advances in learning by observation. *Brain Research Reviews, 42,* 252–264.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number.* New York: Norton.

Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child.* New York: Basic Books.

Piazza, M., Mechelli, A., Butterworth, B., & Price, C. J. (2002). Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? *NeuroImage, 15,* 435–446.

Pintrich, P. (2003). A motivational science perspective on the role of student motivation in learning and teaching contexts. *Journal of Educational Psychology, 95,* 667–686.

Platz, D. L. (2004, Fall). Challenging young children through simple sorting and classifying: A developmental approach. *Education, 125,* 88–96.

Pugalee, D. K. (2001, May). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics, 101,* 236–245.

Qin, Y., Carter, C. S., Silk, E. M., Stenger, V. A., Fissell, K., Goode, A., et al. (2004, April 13). The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 101,* 5686–5691.

Rodriguez, D., Parmar, R. S., & Signer, B. R. (2001, Winter). Fourth-grade culturally and linguistically diverse exceptional students' concepts of number line. *Exceptional Children, 67,* 199–210.

Rose, S. (2005). *The future of the brain: The promise and perils of tomorrow's neuroscience.* New York: Oxford University Press.

Rouselle, L., & Noël, M-P. (2007, March). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition, 102,* 361–395.

Rubinstein, O., & Henik, A. (2005, September). Automatic activation of internal magnitudes: A study of developmental dyscalculia. *Neuropsychology, 19,* 641–648.

Ruffell, M., Mason, J., & Allen, B. (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 35,* 1–18.

Ryan R., & Deci, E. (1999). Intrinsic and extrinsic motivation: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25,* 54–67.

Sabbagh, L. (2006, August-September). The teen brain hard at work. *Scientific American Mind, 17,* 20–25.

Sathian, K., Simon, T. J., Peterson, S., Patel, G. A., Hoffman, J. M., & Grafton, S. T. (1999, January). Neural evidence linking visual object enumeration and attention. *Journal of Cognitive Neuroscience, 11,* 36–51.

Sawyer, W. W. (1982). *Prelude to mathematics.* New York: Dover Publications.

Scharton, S. (2004, January). I did it my way: Providing opportunities for students to create, explain, and analyze computation procedures. *Teaching Children Mathematics, 10,* 278–283.

Schmandt-Besserat, D. (1985). Oneness, twoness, threeness. *The Sciences* (New York Academy of Sciences), 44–48.

Schwartz, C. E., Wright, C. I., Shin, L. M., Kagan, J., Whalen, P. J., McMullin, K. G., et al. (2003, May). Differential amygdalar response to novel versus newly familiar neutral faces: A functional MRI probe developed for studying inhibited temperament. *Biological Psychiatry, 53,* 854–862.

Schweinsburg, A. D., Nagel, B. J., & Tapert, S. F. (2005, September). fMRI reveals alteration of spatial working memory networks across adolescence. *Journal of the International Neuropsychological Society, 11,* 631–644.

Seo, K.-H., & Ginsburg, H. P. (2003). "You've got to carefully read the math sentence. . .": Classroom context and children's interpretations of the equals sign. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 161–187). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Serlier-van den Bergh, A. (2006). *NLD primary materials: Basic theory, approach, and hands-on strategies.* Paper presented at the Symposium of the Nonverbal Learning Disorders Association, March 10–11, 2006, San Francisco, CA.

Shaley, R. S., Manor, O., Kerem, B., Ayali, M., Badichi, N., Friedlander, Y., et al. (2001, January-February). Developmental dyscalculia is a familial learning disability. *Journal of Learning Disabilities, 34,* 59–65.

Sharma, M. (2006). *How children learn mathematics.* Framingham, MA: Center for Teaching/Learning Mathematics.

Shearer, C. B. (2004). Using a multiple intelligences assessment to promote teacher development and student achievement. *Teachers College Record, 106,* 147–162.

Shields, D. J. (2005, Fall). Teachers have the power to alleviate math anxiety. *Academic Exchange, 9,* 326–330.

Siegler, R. S., & Jenkins, E. A. (1989). *How children discover new strategies.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Singh, K., Granville, M., & Dika, S. (2002). Mathematics and science achievement effects of motivation, interest, and academic engagement. *Journal of Educational Research, 95,* 323–332.

Smith, S. Z., & Smith, M. E. (2006, March). Assessing elementary understanding of multiplication concepts. *School Science and mathematics, 106,* 140–149.

Solomon, P. G. (2006). *The math we need to know and do in grades PreK–5: Concepts, skills, standards, and assessments.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sousa, D. A. (2005). *How the brain learns to read.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sousa, D. A. (2006). *How the brain learns* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sowder, J., & Schappelle, B. (Eds.). (2002). Research related to teaching: Introduction. *Lessons Learned from Research.* Reston, VA. NCTM.

Spelke, E. S. (2005). Sex differences in intrinsic aptitude for mathematics and science? A critical review. *American Psychologist, 60,* 950–958.

Spencer, S. J., Steele, C. M., & Quinn, D. M. (1999). Stereotype threat and women's math performance. *Journal of Experimental Social Psychology, 35,* 4–28.

Squire, L. R., & Kandel, E. R. (1999). *Memory: From mind to molecules.* New York: W. H. Freeman.

Starkey, P. & Cooper, R. G., Jr. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science, 210,* 1033–1035.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies,* New York: Springer-Verlag.

Steinberg, L. (2005, February). Cognitive and affective development in adolescence. *Trends in Cognitive Sciences, 9,* 69–74.

Stonewater. J. K. (2002, November). The mathematics writer's checklist: The development of a preliminary assessment tool for writing in mathematics. *School Science and Mathematics, 102,* 324–334.

Strauss, M. S., & Curtis, L. E. (1981). Infant perception of numerosity. *Child Development, 52,* 1146–1152.

Suresh, P. A., & Sebastian, S. (2000). Developmental Gerstmann's syndrome: A distinct clinical entity of learning disabilities. *Pediatric Neurology, 22,* 267–278.

Tang, Y., Zhang, W., Chen, K., Feng, S., Ji, Y., Shen, J., Reiman, E. M., & Liu, Y. (2006, July 11). Arithmetic processing in the brain shaped by cultures. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 103,* 10775–10780.

Taylor-Cox, J. (2001, December). How many marbles in the jar? Estimation in the early grades. *Teaching Children Mathematics, 8,* 208–214.

Temple, E., & Posner, M. (1998). Brain mechanisms of quantity are similar in 5-year-olds and adults. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 95,* 7836–7841.

Terry, W. S. (2005). Serial position effects in recall of television commercials. *Journal of General Psychology, 132,* 151–163.

TIMSS Video Mathematics Research Group. (2003). Understanding and improving mathematics teaching: Highlights from the TIMSS 1999 video study. *Phi Delta Kappan, 84,* 768–779.

Tomlinson, C. (1999). *The differentiated classroom: Responding to the needs of all learners.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Wagner, A. D., Schacter, D. L., Rotte, M., Koutstaal, W., Maril, A., Dale, A. M., Rosen, B. R., &

Buckner, R. L. (1998, August 21). Building memories: Remembering and forgetting of verbal experiences as predicted by brain activity. *Science*, *281*, 1188–1191.

Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003, May). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research and Practice, 18,* 121–131.

Woodruff, G., & Premack, D. (1981). Primitive mathematical concepts in the chimpanzee: Proportionality and numerosity. *Nature, 293,* 568–570.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36,* 155–193.

Young-Loveridge, J. (2002, November). Early childhood numeracy: Building an understanding of part-whole relationships. *Australian Journal of Early Childhood, 27,* 36–42.

Zaslavsky, C. (2001, February). Developing number: What can other cultures tell us? *Teaching Children Mathematics, 7,* 312–319.

Zorzi, M., Priftis, K., & Umiltá, C. (2002). Neglect disrupts the mental number line. *Nature, 417,* 138.

资　源

Note: All Web sites were active at time of publication.

Ask Dr. Math

http://mathforum.org/dr.math/

This site began as a project at Swarthmore College that used university students to answer questions in mathematics. There are now hundreds of volunteers from colleges around the world who answer mathematics questions. The Frequently Asked Questions page makes interesting reading, especially "A Crash Course in Symbolic Logic."

Assessment in Math and Science

www.learner.org/resources/series93.html

This site is sponsored by Annenberg Media and contains free (with registration) online video workshops on Knowing versus Understanding, Scoring, Embedded Assessment, Connections Across the Disciplines, and Assessment Reform.

Calc101.com Automatic Calculus and Algebra Help

www.calc101.com

This site offers free and passworded help for finding derivatives, integrals, graphs, matrices, determinants, and systems of linear equations. The solutions are provided in simple terms and use standard mathematics notation, and show the steps used.

Calculus Help.com

www.calculus-help.com

This fun site for calculus includes a problem of the week, tutorials, an interactive cheat sheet, calculus music (the touching "Quadratic Formula Song," the catchy "Day Before Notebooks Are Due Blues," and calculus holiday carols). The site updates often with new material.

Coping With Math Anxiety

www.mathacademy.com/pr/minitext/anxiety/index.asp

This site takes a constructive look at math anxiety, its causes, its effects, and at how students can

learn to manage this anxiety so that it no longer hinders their study of mathematics. It includes special strategies for studying mathematics, doing homework, and taking exams.

Geometry Junkyard

www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard

Created by David Eppstein, a professor of computer science at the University of California-Irvine, this site contains clippings, web pointers, lecture notes, research excerpts, papers, abstracts, programs, problems, and other information related to discrete and computational geometry, presented in a unique and entertaining format.

Interactivate Math Activities

www.shodor.org/interactivate/activities/

From the Shodor Education Foundation, this site includes a curve generator, a bounded fraction finder, and an impressive list of games for geometry, algebra, probability, statistics, and modeling.

Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles

www.cut-the-knot.org/content/shtml

An entertaining site with hundreds of problems in all areas of mathematics presented in an interactive format.

Interactive Resources

www.globalclassroom.org/ecell00/javamath.html

This is a portal to interactive mathematics sites designed for grades one through six. It includes algebra patterns and function, place value, money, arithmetic operations, time graphing, measurement, fractions, decimals, and geometry.

Karl's Calculus Tutor

www.karlscalculus.org/calculus.html

This site provides extensive help with all areas in calculus, including number systems, limits, continuity, derivatives, applications of derivatives, exponentials and logarithms, trigonometry functions, and downloads for calculator programs.

Layered Curriculum®

http://help4teachers.com

This is Kathie Nunley's site, which offers information about her methods for layering the curriculum in mathematics and other subject areas.

MacTutor History of Mathematics

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

Maintained by the University of St. Andrew in Scotland, this site is an excellent source of material on the history of mathematics. It has an extensive list of biographies of famous mathematicians and is rich in information on a wide variety of topics, including ancient Babylonian, Chinese, and modern-day mathematics.

Math Cats

www.mathcats.com

This is a site for primary elementary grade students that uses attractive animation to teach arithmetic operations, conversions, measurement, estimation, geometry, and other related topics.

Mathematical Interactivities—Puzzles, Games, and Other Online Educational Resources

http://mathematics.hellam.net/

Students here can play unique mathematical games, and find out how to do number tricks and more on this interesting site. Teachers should preview the games before assigning them because some of the sites are not self-explanatory and do not provide adequate feedback.

The Math Forum

http://mathforum.org

Sponsored by Drexel University, this site offers answers to many questions in mathematics, plus weekly puzzles and games.

Math Homework Help

www.phoenix.k12.ny.us/jcb/staff/math/mathhelp.htm

This site offers an extensive listing of homework help sites for algebra, pre-algebra, AP statistics, precalculus, calculus, computer science, conversions, calculators, and graphing. The math glossary is excellent.

The Math Playground

www.mathplayground.com

This graphically appealing site offers elementary and middle school students an entertaining way to learn word problems, logic games, and mathematics games. The site also contains printable worksheets, interactive quizzes, and practice facts.

Math Teacher Link: Classroom Resource Bank

http://mtl.math.uiuc.edu/classroom_resources.htm

Sponsored by the University of Illinois at Urbana, this site connects to teacher-created classroom projects, algebra, geometry, calculus, and probability and statistics links. Project-based Internet lessons and sample mathematics lesson plans are also available.

Math2.org

www.math2.org

This site features reference tables, an open mathematics encyclopedia, a collection of mathematical theorems and formulas, and over one hundred graphical JAVA applets that demonstrate mathematical concepts.

Mr. Calculus

http://homepages.roadrunner.com/askmrcalculus/index.html

This site provides assistance with AP Free Response tests and links to tables on derivatives, convergence tests, logarithms, exponents, and other useful college mathematics and calculus sites. Included are interactive lessons and calculators for all types of mathematical operations, as well as lessons and worksheets, a prime numbers chart, a perfect squares chart, and study tips.

National Council of Teachers of Mathematics: Principles and Standards

http://standards.nctm.org/

The NCTM document from 2000 that recommends the processes and standards of mathematics instruction for grades preK–12.

Number Worlds Elementary Mathematics Program

http://clarku.edu/numberworlds/

The *Number Worlds* program is a research-based PreK–6 curriculum that teaches the specific math concepts and skills needed for later mathematical learning. The program has been evaluated with children from low-income populations and proven effective in enhancing computational fluency, number sense, mathematical reasoning and communication, as well as performance on standardized mathematics achievement tests.

Online Quizzes

www.edselect.com/quizzes.htm

Here is an extensive listing of quiz sites and quiz creators, including a free-to-nonprofits software programs that allow you to create interactive multiple-choice, short-answer, jumbled-sentence, crossword, and matching exercises.

PBS Teachers: Math

www.pbs.org/teachers/math

This is a curriculum data bank in all areas of PreK–12 mathematics provided by the Public Broadcasting Service with links to books, media, and online professional development courses.

Practical Uses of Math and Science (PUMAS) NASA

http://pumas.jpl.nasa.gov

This site offers dozens of suggestions on how to show the practical and everyday uses of mathematics and science.

Professor Freedman's Math Help

www.mathpower.com

This site was created by Ellen Freedman, a professor from Camden Community College in New Jersey. It provides information about basic mathematics, algebra, study skills, math anxiety, and learning styles and specifically addresses the needs of the community college adult learner. There are musical videos illustrating different mathematical operations, tutorials, homework assignments, interactive games, and links to many more resources.

Purplemath

www.purplemath.com/internet.htm

This award-winning site provides links to lessons and tutoring, quizzes and worksheets, and a collection of downloadable information on mathematics.

SuperKids Math Worksheet Creator

www.superkids.com/aweb/tools/math/index.shtml

This site helps teachers easily customize worksheets for arithmetic operations, fractions, percentages, greater than/less than, odd or even, rounding, averages, exponents, factorials, prime numbers, and telling time.

内容索引*

---

* 本索引中,索引主题之后的数字为英文版页码,现为中文版的页边码,提示可在页边码标示的页面中检索相关内容。——译者注

F

G

H

J

K

L

M

N

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

译者后记

作为专注于数学学习认知神经科学领域的研究者，我们一直希望有这么一本书，能够对脑与数学认知研究领域中各种有趣的研究成果加以解读，为教与学的各种理论提供坚实的佐证，并开拓新的观点。若干年前，我们看到过一些这样的尝试，但或许是由于认知神经科学领域研究的专业性太强，而且近几年来发展迅速，以前的一些理论和观点在不断地修正和完善，因此，早年间的一些观点颇有些牵强甚至是错误的。而今市场上举着开发大脑旗帜的教育理念又多成为商业宣传的口号，少有对于人脑功能的深入了解，只拿些支离破碎的研究结果夸大其词，有些甚至是拿着已被否认的观点作招牌。作为该领域的研究者，看着这种情况很是担心。因此，当我们看到这本书时，真可以说是感到惊喜，想要尽我们所能，把它介绍给更多的读者。

作者在书中，对认知神经科学领域的研究成果进行了客观和科学的分析，从中可以看出作者对这一领域研究理解的深度。而作为有着多年数学教育一线工作经验的研究者，作者明确地知道，教师和学生们最需要的是什么。整本书中，作者用简洁平实的语言，深入浅出地讲解了研究成果对于数学学习中出现的一些问题的解释；从大脑发育的规律，从一

般认知学习的特性等方面，为数学的教与学提出了建议，并针对从幼儿园到中学不同时期的数学教学给出了具体的操作建议。正是由于作者科学的态度和对知识深厚的把握，本书获得了2008年美国独立出版书籍奖的铜奖。我们也非常高兴有机会把这么一本书带到中国读者的面前。当然，我们要看到，作者是从美国数学教育的角度去分析数学学习中可能存在的问题和解决方法。其中一些在美国学生看来困难的问题，在中国并不一定存在，甚至如作者所说，反而是中国学生的优势所在。但是，作者所提倡的，从遵循人类对数的直觉能力的角度，从遵循人脑特性和发展规律的角度去学数学，也正是在中国的数学教育中迫切需要解决的问题。数学是不是背公式？要学好数学是不是靠大量做题？到底什么是数学？对于这些问题，作者在书中都有具体的分析，或许可以为中国一线的数学教育工作者提供有力的借鉴。

正如前面所说，由于认知神经科学研究领域的飞速发展，也许会对之前的成果有所修正。作者也并不能保证所有的观点都永远正确。正如作者写作的科学态度，我们在阅读时也不要盲从，要本着客观和分析的角度去理解，从我们的实践当中去发现可能存在的问题，并为科学研究提出新的问题。

本书翻译分工如下：前言、第二章和第五章，赵晖；第一章和第四章，徐继红；第三章，李小溪；第六章，王芳；第七章，胡潇；第八章，杨红。赵晖对全书进行了最后的修改和校稿。由于时间和水平有限，翻译中难免有错漏和表达不当之处，真诚欢迎广大读者批评指正。我们希望能共同努力，把世界上最优秀的研究成果不断呈现给大家，让科学研究能够为人类的学习和生活服务，让孩子们真正地享受学习的乐趣。

赵　晖
2016年6月9日，于北京